

*The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction.*

– Sidney Coleman

L'oscillateur harmonique touche à toute la physique. Comme vous le verrez dans les exemples, cela nous amènera à examiner de nombreux domaines, thermodynamique des trous noirs, optique, biophysique, électrocinétique, électrodynamique quantique et bien sûr, mécanique. Il s'agit de regarder les systèmes physiques proches de leurs positions d'équilibre et d'en déduire des propriétés sur ceux-ci. Shall we ?

**Avertissement :** Dans ce cours, je m'efforce à montrer l'universalité de l'oscillateur harmonique. Par rapport à vos cours de physique habituels, on monte en généralité. Mais cette montée en généralité se fait à un prix : on est obligé d'être beaucoup plus abstrait que ce à quoi vous êtes habitués. C'est normal d'avoir un peu de mal avec ça. Cependant, gardez à l'esprit que cette abstraction est là pour démontrer des résultats généraux, que vous n'aurez qu'à utiliser dans des cas particuliers. On vous apprend comment fonctionnent une grande classe de problèmes mécaniques, ce qui vous permet de traiter plein de problèmes mécaniques particuliers. Ce qui veut dire que cette abstraction, nécessaire aux démonstrations, n'est pas du tout quelque chose qu'on peut exiger de vous. Vous n'avez pas à maîtriser ce niveau d'abstraction. Dans un problème d'IPhOs vous étudiez un problème, un système, on ne vous demande pas de traiter une classe générale de problèmes. Je rajouterais enfin que même si ce cours est imposant, il ne doit pas vous occuper trop longtemps. Le plus important est de faire le plus d'exercices possible, même avant d'avoir parfaitement tout compris. Les mises en situation et les corrections de cas concrets aident à comprendre et apprendre le cours, alors que ne réviser que le cours ne vous apprend pas à résoudre un problème d'IPhOs.

**Mode d'emploi de ce cours :** les trois premières parties sont l'essentiel du cours et sont importantes à comprendre. Certains paragraphes de la partie 4 peuvent être occasionnellement utiles pour le test de présélection, mais sont clairement moins cruciaux. La partie 5 est entièrement en bonus. Le grand nombre de paragraphes non-utiles pour le test de présélection, potentiellement durs et demandant d'avoir déjà compris les trois premières parties font que ce cours n'est pas fait pour être lu en intégralité en une seule fois. Lisez les trois premières parties, et éventuellement les paragraphes utiles de la partie 4, puis quand vous vous sentez plus à l'aise sur le chapitre/en mécanique en général, vous pouvez revenir sur le cours pour lire un paragraphe bonus de temps en temps.

## 1 Stabilité des équations différentielles

Les systèmes physiques sont régis par des équations différentielles. Il est donc naturel qu'on s'intéresse à la stabilité des quantités régies par des équations différentielles, parce que c'est le langage de la physique. Ici,  $x$  est une quantité quelconque, cela peut-être la position, la vitesse, la concentration, le potentiel, l'angle... On va s'intéresser surtout à de la stabilité temporelle, d'où la notation  $\dot{x}(= \frac{dx}{dt})$ , mais cela s'applique à toutes les dépendances (comme la position).

On se restreindra aux équations suivantes, qui sont celles qu'on rencontre presque tout le temps en physique :

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Équation différentielle d'ordre 1, et

$$\ddot{x} = f(x) \tag{2}$$

Équation différentielle d'ordre 2.

Où  $f$  est une fonction quelconque.

### 1.1 Positions d'équilibre

Quelles sont les positions d'équilibre ? Comment les trouver ? Et bien une position d'équilibre est un endroit où l'on peut rester indéfiniment. C'est-à-dire une position telle qu'il n'y ait pas de mouvement. En ce point, on doit donc avoir  $\dot{x} = 0$  et  $\ddot{x} = 0$ .

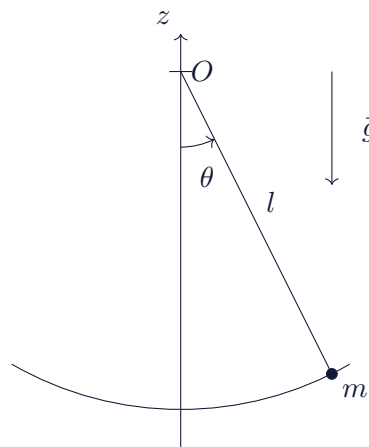
**Définition 1 : Position d'équilibre**

Une position d'équilibre est un zéro de  $f$ , c'est-à-dire un point où  $f$  passe par l'axe des abscisses.

Voici quelques exemples pour se familiariser avec la notion. Idéalement, il faut être capable de les refaire.

**Exemples :**

Pendule simple :



L'équation du pendule simple est :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

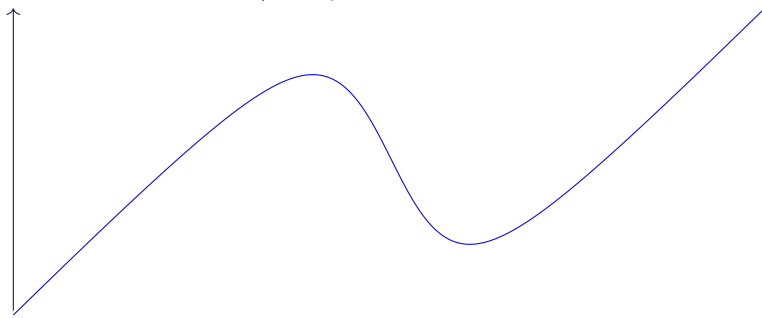
Donc les deux positions d'équilibre sont les  $\theta_{eq}$  tels que  $\frac{g}{l} \sin(\theta_{eq}) = 0$ . Donc  $\sin(\theta_{eq}) = 0$ , c'est-à-dire  $\theta_{eq} = 0$  ou  $\theta_{eq} = \pi$ . On attendait la première position d'équilibre, mais  $\theta = \pi$  est plus surprenant. On verra par la suite qu'elle est instable, ce qui est conforme à ce qu'on peut attendre.

Rotation de l'ATP-synthase :

La molécule d'ATP-synthase est constituée d'une partie immobile, le stator, et d'une partie pouvant se mettre en rotation autour du stator, le rotor. Sa rotation propre est donnée par l'équivalent du principe fondamental de la dynamique (PFD) en rotation, le théorème du moment cinétique :

$$J\ddot{\theta} = \alpha - k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$$

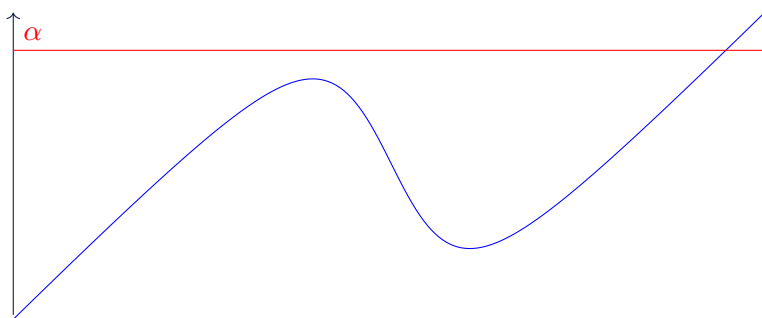
Représentons la fonction  $\theta \mapsto k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$ , pour un grand  $\theta_1$ .



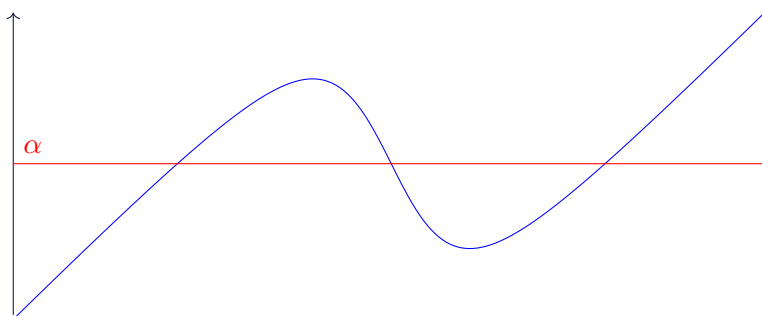
Pour l'équilibre, on veut

$$\alpha = k\theta_{eq}\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_{eq}^2 + \theta_0^2}}\right)$$

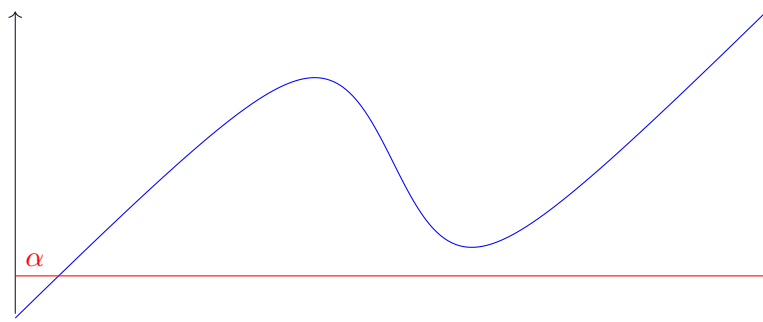
On a donc trois possibilités en fonction de la valeur de  $\alpha$ .



Dans ce cas, une position d'équilibre.



Dans celui-ci, trois.



Dans ce dernier, une seule.

*Commentaire :* Vous pouvez être déroutés (et à raison) par l'absence d'axes et de légendes sur ces graphiques. J'ai fait ce choix pour insister sur ce qui compte vraiment : le comportement. Je représente cette fonction, mais je me fiche totalement de sa valeur en un point et de son homogénéité. Je pourrais multiplier cette fonction par une constante positive qui lui donnerait une autre dimension, et ça ne changerait pas mon analyse. Ce qui m'intéresse ici c'est qu'elle part de  $-\infty$ , qu'elle croît, puis qu'elle décroît, puis qu'elle croît jusqu'à  $+\infty$ , et le nombre d'intersection avec une droite horizontale qui en découle.

### 1.2 Stabilité des positions d'équilibre

La notion de stabilité est un peu plus fine. L'idée est que si une position est stable, on va y revenir quoi qu'il arrive. Et si elle est instable, au moindre coup de vent on s'en éloignera substantiellement.

On suppose qu'on a une position d'équilibre  $x_0$ . La précision parfaite n'existe pas, il y aura donc quoi qu'il arrive des variations autour de cette position : imprécision de l'expérimentateur, coup de vent, agitation thermique, et, si on est vraiment fou, fluctuations quantiques. On note donc  $\varepsilon$  la petite variation que subit le système autour de sa position d'équilibre.

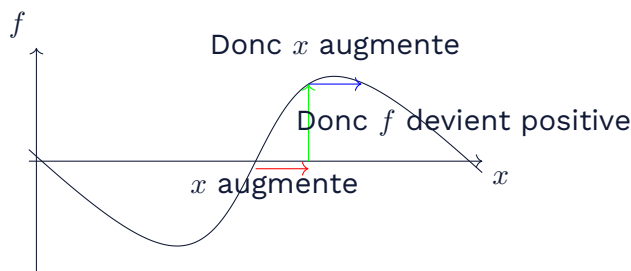
Supposons que  $f$  soit croissante.

-Si  $\varepsilon > 0$ ,  $x = x_0 + \varepsilon > x_0$ , donc  $f(x) > f(x_0) = 0$  donc  $\dot{x} > 0$  ou  $\ddot{x} > 0$ . Donc  $x$  a tendance à augmenter, donc à s'éloigner d'autant plus de la position d'équilibre.

-Si  $\varepsilon < 0$ ,  $x = x_0 + \varepsilon < x_0$ , donc  $f(x) < f(x_0) = 0$  donc  $\dot{x} < 0$  ou  $\ddot{x} < 0$ . Donc  $x$  a tendance à diminuer, donc à s'éloigner d'autant plus de la position d'équilibre.

#### Propriété 1 : Équilibre instable

Donc si  $f$  est localement croissante, la position d'équilibre est instable.



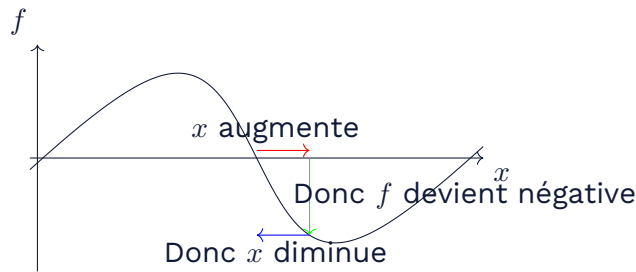
Supposons que  $f$  soit décroissante.

-Si  $\varepsilon > 0$ ,  $x = x_0 + \varepsilon > x_0$ , donc  $f(x) < f(x_0) = 0$  donc  $\dot{x} < 0$  ou  $\ddot{x} < 0$ . Donc  $x$  diminue, donc se rapproche de  $x_0$ .

-Si  $\varepsilon < 0$ ,  $x = x_0 + \varepsilon < x_0$ , donc  $f(x) > f(x_0) = 0$  donc  $\dot{x} > 0$  ou  $\ddot{x} > 0$ . Donc  $x$  augmente, donc se rapproche de  $x_0$ .

**Propriété 2 : Équilibre stable**

Donc si  $f$  est localement décroissante, la position d'équilibre est stable.



Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur, mais les raisonnements et les dessins sont à savoir refaire. Voici plusieurs exemples illustratifs. Ils ne sont pas tous simples, mais il faut idéalement être capable de tous les refaire in fine.

**Exemples :**

Pendule simple :

On reprend l'équation du pendule simple :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

$\sin$  est croissante au voisinage de 0, et décroissante au voisinage de  $\pi$ .  $\theta = 0$  est donc une position d'équilibre stable, et  $\theta = \pi$  est une position d'équilibre instable. Ces deux résultats sont attendus.



Pour  $\theta = \pi$ , si  $\theta$  diminue un peu, le poids a une composante non-nulle négative selon  $\vec{u}_\theta$ , donc le poids a tendance à faire diminuer  $\theta$ , ce qui fait tomber la masse.



Pour  $\theta = 0$ , si  $\theta$  augmente un peu, le poids a une composante non-nulle négative selon  $\vec{u}_\theta$ , donc  $\theta$  a tendance à diminuer.

Équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

L'équation

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

admet 0 pour unique position d'équilibre et est stable pour  $k \leq 0$ , instable pour  $k > 0$ .

Rotation de l'ATP-synthase :

La pente de la fonction de droite dans

$$J\ddot{\theta} = \alpha - k\theta \left( 1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}} \right)$$

est l'opposée de la pente de la fonction bleue. La monotonie d'une fonction est reliée au signe de sa pente (par la dérivée). Donc une position d'équilibre est stable si la pente de la fonction bleue est positive (ce qui veut dire que que la fonction du membre de droite dans l'équation différentielle est décroissante). La solution de gauche, quand elle existe, est donc stable. Celle du milieu, quand elle existe est instable. Et celle de droite, quand elle existe, est stable.

Thermodynamique des trous noirs (IPhOs, Liban 2007) :

On peut montrer que la masse d'un trou noir, à l'équilibre entre son rayonnement propre et le rayonnement du fond diffus cosmologique, vérifie

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^4}{16G^2} \frac{1}{m^2} \left( 1 - \frac{m^4}{m^{*4}} \right)$$

On se demande alors, les trous noirs ont-ils tendance à s'évaporer ou à se stabiliser ? (question légitime)

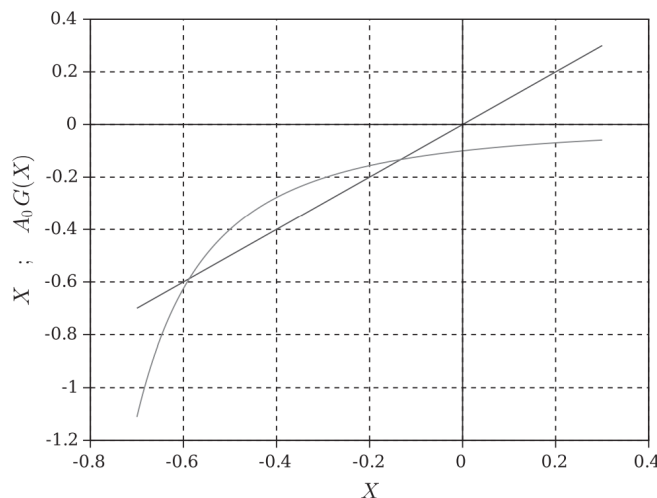
On remarque que  $m^*$  est clairement la seule position d'équilibre de la masse. Si  $m > m^*$ , on remarque que  $\frac{dm}{dt} > 0$ , donc on s'éloigne de  $m^*$ . De même, si  $m < m^*$ ,  $\frac{dm}{dt} > 0$ , donc on s'éloigne encore de  $m^*$ . C'est donc un équilibre instable ! Reste à savoir s'ils ont tendance à s'évaporer ou à engloutir tout l'univers...

X Physique SI 2017 :

En étudiant un transducteur électroacoustique, on est ramené à l'équation différentielle :

$$\alpha \ddot{X} = A_0 G(X) - X$$

On représente la fonction  $A_0 G$  ainsi que la droite  $Y = X$  :



Les positions d'équilibre sont les croisements de ces deux courbes. Pour la première position d'équilibre, la pente de  $A_0G(X)$  est plus grande que celle de  $X$ , donc  $A_0G(X) - X$  est croissante, donc la position est instable. Pour la deuxième position d'équilibre, c'est l'inverse, elle est donc stable.

## 2 Comportement des systèmes physiques au voisinage d'une position d'équilibre

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en une dimension,

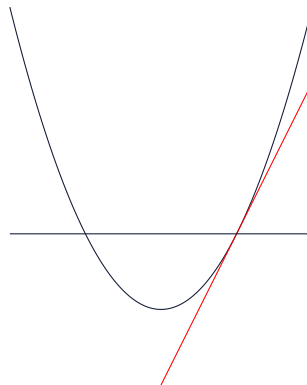
$$m\ddot{x} = F \tag{3}$$

On se limitera donc dans cette partie à des équations de cette forme. Nous voulons aussi écrire que  $F$  est une fonction de  $x$ , pour se ramener aux cas étudiés précédemment. Ce n'est pas toujours possible. En effet si on prend un élastique, et qu'on tire dessus si fort qu'on le distend, au retour il n'exercera pas la même force qu'à l'aller, puisque ses caractéristiques physiques ont été modifiées entre l'aller et le retour. Cependant, suffisamment proche d'une position d'équilibre, c'est possible.

Nous voulons savoir comment un système physique se comporte lorsqu'il est un tout petit peu perturbé par rapport à sa position d'équilibre. Nous nous fichons de tout connaître sur le système, nous voulons seulement son **comportement** (donc quelque chose d'approximatif) au voisinage d'une position d'équilibre, puisque comme on l'a vu plus haut, c'est le comportement local qui nous renseigne sur la stabilité. Cette approche est d'autant plus valable que, si la position d'équilibre est stable, on sait que l'on reste proche de celle-ci, donc on l'approximation au voisinage de la position d'équilibre reste valable. Nous nous permettons donc d'approximer la force par sa tangente en la position d'équilibre. Puisqu'on veut avoir  $\ddot{x} = 0$ , pour une position d'équilibre  $x_0$ , on a  $F(x_0) = 0$ . On écrit donc

$$m\ddot{x} \approx \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \tag{4}$$

Il s'agit simplement de l'équation de la tangente à  $F$  en  $x_0$ .



Et comme on l'a vu plus tôt, la monotonie de  $F$  au voisinage de  $x_0$ , c'est-à-dire le signe de  $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0}$ , nous renseigne sur la stabilité de la position d'équilibre. Plutôt que de systématiquement dériver, ce qui peut être technique et long à faire, nous allons apprendre un moyen efficace de linéariser des fonctions, les développements limités.

## 2.1 Développement Limités (DLs)

Faire un DL, c'est approximer localement une fonction par un polynôme. Un DL à l'ordre  $n$ , c'est approximer une fonction par un polynôme de degré  $n$ . Nous ferons essentiellement des DLs à l'ordre 1, c'est-à-dire linéariser. Le principe est donc exactement ce qu'on a vu, c'est regarder localement ce qui se passe pour une fonction donnée, et en donner l'équation de la tangente. Simplement la méthode est autre que la dérivation (mais donne heureusement le même résultat). On commence par donner les DLs de fonctions usuelles au voisinage de 0, pour une variable  $x$  **adimensionnée**.

Fonction	DL à l'ordre 1 en 0
$e^x$	$1 + x$
$\ln(1 + x)$	$x$
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x$
$\cos(x)$	$1$
$\sin(x)$	$x$

Il peut être utile de connaître le DL à l'ordre 2 de cos :  $\cos(x) \underset{x \ll 1}{=} 1 - \frac{x^2}{2}$

Comment savoir si on est suffisamment proche de 0 ? Les fonctions citées varient sur une échelle typique de l'ordre de l'unité, il faut donc avoir  $x \ll 1$ . Petit comment ? Cela dépend de la précision de l'expérience. Mais on sait désormais à quoi comparer  $x$  pour faire une approximation. Ce qu'il est important de comprendre c'est que **plus on monte dans les ordres, et plus les termes sont petits**, et donc plus on est précis. En effet,  $x \ll 1$ , donc  $x^{n+1} \ll x^n$ .

### Méthode 1 : Calcul des DLs adimensionnés au voisinage de 0

On utilise les DLs usuels pour obtenir une somme de produits de fonctions linéarisées. Les DLs se composent, se multiplient et s'additionnent naturellement. Puisque l'on fait une linéarisation, on néglige tous les termes avec des puissances de  $x$  plus grandes que 1.

#### Exemple :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^\beta e^{(1+x)^\alpha} &\underset{x \ll 1}{=} (1+\beta x)e^{1+\alpha x} \\
 &= (1+\beta x)e \times e^{\alpha x} \\
 &= e \times (1+\beta x)(1+\alpha x) \\
 &= e \times (1+(\beta+\alpha)x)
 \end{aligned}$$

Pour plus d'entraînement, voir exercice 1.

On considère maintenant une fonction quelconque, au voisinage d'un point quelconque, qui peut avoir une dimension.

### Méthode 2 : Méthode de calcul des DLs dimensionnés au voisinage d'un point quelconque

On fabrique un paramètre adimensionné  $x_0 \ll 1$ . On se ramène alors au cas des DLs adimensionnés au voisinage de 0.

**Exemple :**

Champ gravitationnel au voisinage de la surface de la Terre :

Nous sommes, comme vous le savez, très loin du noyau de la Terre, ce qui fait qu'à notre échelle, le champ gravitationnel varie à peine. Si l'on veut estimer la manière dont il varie, on peut faire un DL. Cela nous donnera la pente de sa variation.

On crée une variable adimensionnée très petite devant 1, en l'occurrence  $\frac{z-R_T}{R_T} = \frac{h}{R_T}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(h) &= -\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \\ &= -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \\ &\underset{\frac{h}{R_T} \ll 1}{=} -\frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right) \end{aligned}$$

Pour qu'il diminue d'1%, il faut donc se placer à une hauteur  $h$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{2h}{R_T} &= 1\% \\ h &\approx 32\text{km} \end{aligned}$$

L'approximation d'un  $\mathcal{G}$  uniforme est donc très bonne à notre échelle. On sait aussi qu'en valeur absolue, on surestime le champ de gravitation.

Bille sur un anneau en rotation :

Vous établirez en exercice (N°39) l'équation différentielle d'une bille astreinte à se déplacer sur un anneau en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin(\theta) + \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Il y a, pour  $\Omega > \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{R}}$ , 4 positions d'équilibre, 0,  $\pi$  et  $\theta_{eq\pm} = \pm \arccos\left(\frac{\Omega_c^2}{\Omega^2}\right)$ . On va s'intéresser à la stabilité de  $\theta_{eq+}$ . On fera un DL à l'ordre 1 du terme de droite de l'équation différentielle pour savoir si cette position est stable ou non, et **puisque c'est une position d'équilibre, on ne s'embêtera pas à calculer le terme constant, puisqu'on sait qu'il s'annule** (la force est nulle au point d'équilibre). On pose  $\varepsilon = \theta - \theta_{eq+} \ll 1$ . Cela va nous donner l'occasion d'apprendre à faire le DL à l'ordre 1 de fonctions trigonométriques en un point quelconque. On a deux possibilités : soit on utilise les formules d'addition de cosinus et de sinus :  $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$  et  $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$ , cela nous permet de nous ramener au voisinage de 0, soit on écrit  $\cos(\theta + \varepsilon) \approx \cos(\theta) + \cos'(\theta)\varepsilon = \cos(\theta) - \sin(\theta)\varepsilon$ . On fait le DL de chaque fonction individuellement avant de réinjecter le tout dans l'équation.

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \sin(\theta_{eq+} + \varepsilon) = \sin(\theta_{eq+}) \cos(\varepsilon) + \cos(\theta_{eq+}) \sin(\varepsilon) \\ &\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} \sin(\theta_{eq+}) + \cos(\theta_{eq+})\varepsilon \\ \cos(\theta) &= \cos(\theta_{eq+} + \varepsilon) = \cos(\theta_{eq+}) \cos(\varepsilon) - \sin(\theta_{eq+}) \sin(\varepsilon) \\ &\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} \cos(\theta_{eq+}) - \sin(\theta_{eq+})\varepsilon \\ -\frac{g}{R} \sin(\theta) + \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) &= -\Omega_c^2 \sin(\theta) + \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\Omega^2 \cos(\theta) - \Omega_c^2) \sin(\theta) \\
 &\underset{\varepsilon \ll 1}{\approx} (\Omega^2 (\cos(\theta_{eq+}) - \sin(\theta_{eq+})\varepsilon) - \Omega_c^2 (\sin(\theta_{eq+}) + \cos(\theta_{eq+})\varepsilon)) \\
 &= (\Omega^2 \cos(\theta_{eq+}) - \Omega_c^2) \cos(\theta_{eq+})\varepsilon - \Omega^2 \sin^2(\theta_{eq+})\varepsilon \\
 &= (\Omega^2 \frac{\Omega_c^2}{\Omega^2} - \Omega_c^2) \cos(\theta_{eq+})\varepsilon - \Omega^2 (1 - \cos^2(\theta_{eq+}))\varepsilon \\
 &= -\Omega^2 \left(1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4}\right) \varepsilon
 \end{aligned}$$

Et comme  $\Omega > \Omega_c$ ,  $\frac{\Omega_c^4}{\Omega^4} < 1$ . Donc cette position d'équilibre est stable. On verra juste après que ce DL veut dire qu'au voisinage de cette dernière, le système oscille à la pulsation  $\omega = \Omega \sqrt{1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4}}$ .

**À retenir :**

- Quand on fait un DL autour d'une position d'équilibre mécanique, on ne calcule pas le terme constant. Il correspond à la valeur de la force en la position d'équilibre, qui s'annule comme on l'a vu plus haut.

- Pour faire le DL de fonctions trigonométriques ailleurs qu'en 0, le plus simple est de passer par la dérivée :  $\cos(\theta + \varepsilon) \approx \cos(\theta) + \cos'(\theta)\varepsilon = \cos(\theta) - \sin(\theta)\varepsilon$  et  $\sin(\theta + \varepsilon) \approx \sin(\theta) + \sin'(\theta)\varepsilon = \sin(\theta) + \cos(\theta)\varepsilon$

Pour plus d'entraînement sur les DLs, voir exercices 2 à 5.

**Propriété 3 : DL à l'ordre  $n$ , formule de Taylor**

La formule générale suivante donne le DL à l'ordre  $n$  en un point quelconque de n'importe quelle fonction dérivable  $n$  fois. Elle n'est pas à connaître et est rarement utile.

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=a} h^k \tag{5}$$

Il est tout de même important de la connaître à l'ordre 2, car cela intervient dans le DL de l'énergie potentielle :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2$$

La méthode des DLs peut paraître contre-intuitive initialement, c'est pourquoi il faut en faire beaucoup, et vous avez pour cela un poly d'exos à votre disposition (voir exercices 2 à 5).

On a donc trouvé un moyen d'obtenir le comportement de la force exercée sur un système au voisinage d'une position d'équilibre, pour en déduire sa stabilité. Pour connaître ensuite la dynamique temporelle de ce système (ce qu'il va devenir), il faut savoir résoudre l'équation mécanique qui en découle (l'équation 4).

**2.2 L'équation différentielle  $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$**

On avait une position d'équilibre, on a linéarisé la force au voisinage de la position d'équilibre et on s'est ramené à l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = C \tag{6}$$

+ pour les positions stables, – pour les positions instables.

La méthode pour résoudre une équation linéaire est toujours la même :

**Méthode 3 : Résoudre une équation différentielle linéaire**

- Trouver la solution particulière  $x_p$ , c'est-à-dire la solution de la forme du membre de droite, c'est-à-dire constante. On résout donc pour  $\ddot{x} = 0$ .
  - Trouver la solution  $x_h$  de l'équation homogène associée, c'est-à-dire celle où on ne garde que les termes en  $x$ , c'est-à-dire  $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$ .
- À la fin,  $x = x_h + x_p$ .
- Finalement, on trouve les constantes en utilisant les conditions initiales sur  $x(t = 0)$  et  $\dot{x}(t = 0)$ .

Il ne reste plus qu'à vous donner la solution au problème

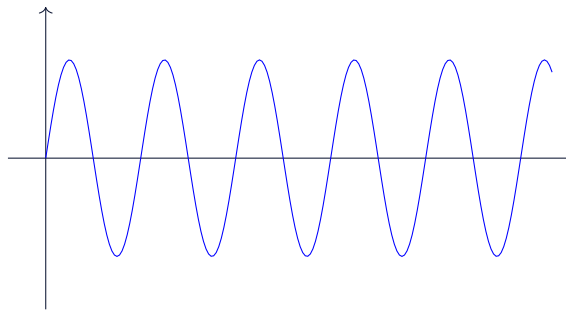
$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0 \tag{7}$$

**Propriété 4 : Solutions de l'équation différentielle  $\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0$**

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \omega^2 x = 0 & \quad x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} = A' \cosh(\omega t) + B' \sinh(\omega t) \\ \ddot{x} + \omega^2 x = 0 & \quad x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = A' \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

**Remarques :**

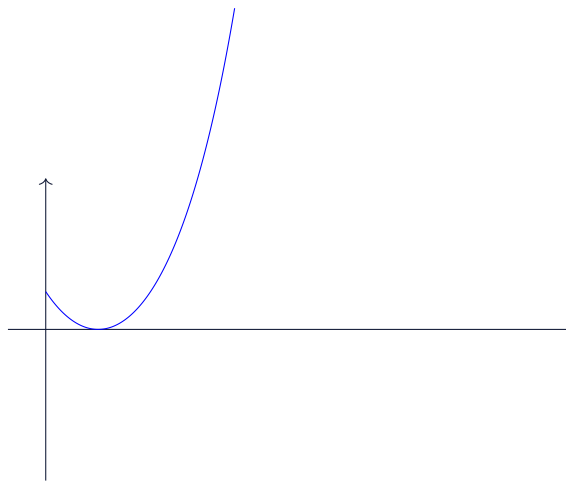
- C'est clairement la deuxième, le cas d'une position stable, qui est la plus importante à connaître.
- On a bien les comportements attendus, la position instable diverge et la position stable reste bornée.
- Les solutions stables sont oscillantes. Ici, on n'a pas modélisé de pertes d'énergie (de frottements), donc cela oscille indéfiniment. Dans la vraie vie, ces oscillations s'atténuent sous l'effet de la dissipation énergétique.
- La fréquence d'oscillation vaut  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  et la période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .
- Les fonctions  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  sont à connaître, car  $\cosh'(x) = \sinh(x)$  et  $\sinh'(x) = \cosh(x)$ , ce qui est pratique car  $\sinh(0) = 0$  et  $\cosh'(0) = 0$ . Cela fait que la fonction  $\cosh$  est sensible à la valeur initiale, et  $\sinh$  est sensible à la dérivée initiale.  $\cosh$  est paire,  $\sinh$  est impaire, elles sont donc utiles quand on a un système qui présente des symétries. Il peut être utile de savoir que  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ . Elles jouent exactement le même rôle pour les solutions instable que  $\cos$  et  $\sin$  pour les solutions stables.



Exemple de solution stable

Vous pouvez être déstabilisés par l'absence de légende au niveau des axes, j'ai fait ce choix pour deux raisons : d'abord parce que je ne veux pas que vous appreniez la tête d'une solution stable en vous disant que c'est nécessairement  $x$  en ordonnée et  $t$  en abscisse ; dans les exemples du cours et dans les exercices, vous verrez plein de fonctions différentes ( $\theta$ ,  $r$ ,  $V$  etc.), et plusieurs dépendances différentes ( $t$ ,  $x$ ,  $z$  etc.). Ensuite parce que, peu importe ce que cette solution représente, ce qui compte c'est son comportement : une oscillation indéfinie bornée. C'est la même chose pour les solutions instables, ce que je veux que vous sachiez c'est qu'elles divergent grossièrement.

- Les solutions instables divergent, et sortent des proportions typiques du système en un temps typique  $\frac{1}{\omega}$



Exemple de solution instable

Cela veut dire qu'en un temps typique de l'ordre de  $\frac{1}{\omega}$ , l'approximation  $x$  très proche de  $x_{eq}$  n'est plus valable.

Pour vous entraîner à résoudre des équations différentielles, vous avez les exercices 6 et 7.

La pulsation  $\omega$  est dite **pulsation propre du système**, ou pulsation des petites oscillations **elle est caractéristique du système** et ne dépend pas des conditions initiales. C'est pour cela qu'on dit que l'oscillateur est harmonique. C'est l'un des intérêts de l'OH, il permet de mesurer facilement des grandeurs pertinentes du système : puisque la pulsation ne dépend pas des conditions initiales, tant qu'on est suffisamment proche d'un point d'équilibre, on mesurera toujours  $\omega$ , et  $\omega$  dépend du système, donc est relié à ses paramètres caractéristiques (masse, longueur, etc.)

**Exemples :**

Pendule simple (à savoir refaire intégralement très rapidement) :

L'équation mécanique du pendule simple est

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Désormais, ce genre de choses ne vous fait pas peur ! D'abord, le DL. On arrive à :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

On suppose qu'on part d'une position  $\theta_0$  sans vitesse initiale. La pulsation propre du pendule est donc  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Voilà un exemple où la pulsation propre nous renseigne sur des propriétés intrinsèques du système. La solution est de la forme

$$\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Les conditions initiales sont  $\theta(t = 0) = A = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t = 0) = B\omega = 0$ , donc  $A = \theta_0$  et  $B = 0$ . Finalement,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

Et vous comprenez comment on peut faire une mesure de  $g$  avec un pendule ! La période  $T$  des oscillations est  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ .

**Propriété 5 : Pulsation du pendule simple**

Le pendule simple oscille au voisinage de sa position d'équilibre stable à la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{8}$$

Pour plus d'entraînement autour du pendule simple, voir exercices 35 à 37 et 44.

Voici ensuite un exemple qui n'est pas à connaître, mais qui illustre toutes les notions qu'on a vues jusque là. C'est donc un exercice d'application, qui n'est pas à connaître mais qu'il faut être en capacité de refaire efficacement.

Quasi-ressort :

On suppose qu'une masse  $m$  est soumise à une force de la forme  $F(x) = -m\omega_1^2(x - a^4/x^3)$  dans la région  $x > 0$ . On se retrousse les manches et on y va. Position d'équilibre ? On résout pour  $F(x_{eq}) = 0$ , on trouve  $x_{eq} = a$ . On veut savoir si c'est stable ou non, on fait un DL.

$$\begin{aligned} F(x_{eq} + \varepsilon) &= -m\omega_1^2 \left( a + \varepsilon - \frac{a^4}{(a + \varepsilon)^3} \right) \\ &= -m\omega_1^2 \left( a + \varepsilon - \frac{a}{(1 + \varepsilon/a)^3} \right) \\ &\underset{|\varepsilon| \ll a}{=} -m\omega_1^2 \left( a + \varepsilon - a(1 - 3\varepsilon/a) \right) \\ &= -4m\omega_1^2 \varepsilon \end{aligned}$$

C'est stable! C'est aussi une bonne leçon : quand on fait un DL de la force au voisinage de la position d'équilibre, on sait que le terme constant s'annule, on n'a donc pas besoin de le calculer (puisque la force s'annule au niveau d'une position d'équilibre). Au voisinage de la position d'équilibre, on a donc

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_{eq} + \ddot{\varepsilon} = \ddot{\varepsilon} \\ m\ddot{x} &= F(x_{eq} + \varepsilon) = -4m\omega_1^2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc :

$$\ddot{\varepsilon} + (2\omega_1)^2\varepsilon = 0$$

La pulsation propre du système au voisinage de sa position d'équilibre est donc  $\omega_0 = 2\omega_1$ . Pour plus d'entraînement de ce genre, voir exercices 38, 39, 42, 43, 48 et 49 (exercices où la pulsation des petites oscillations nous permet de faire des mesures de paramètres importants du système).

### 2.3 Le ressort

On sait donc que tout système mécanique, au voisinage d'une position d'équilibre stable, est équivalent à un système percevant une force  $F(x) = -k(x - x_0)$ . Il se trouve que c'est l'équation constitutive d'un ressort.

#### Propriété 6 : Force de rappel d'un ressort

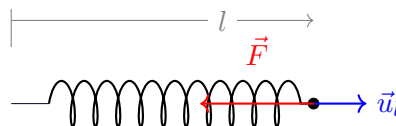
Un ressort exerce une force  $\vec{F}$  en fonction de sa longueur  $l$  :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_l \tag{9}$$

Avec  $\vec{u}_l$  un vecteur unitaire (de norme 1) parallèle au ressort et orienté dans le sens d'augmentation de la longueur  $l$ .  $k$  est appelée la constante de raideur du ressort et  $l_0$  est appelée la longueur à vide.

Pour un ressort réel, un ordre de grandeur de  $k$  est  $50\text{N m}^{-1}$  (pour un ressort utilisé en TP).

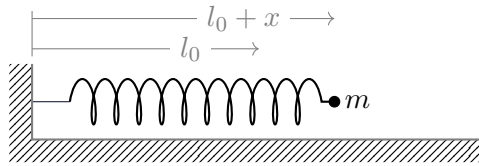
L'oscillateur harmonique est la raison pour laquelle on voit des ressorts partout en mécanique, il s'agit de la linéarisation de la force au voisinage d'une position d'équilibre stable. C'est en particulier la force exercée par un élastique au voisinage de sa position d'équilibre. On parle de force de rappel élastique.



On fait quasi-systématiquement l'hypothèse que le ressort est idéal, c'est-à-dire sans masse. En effet, l'expression de la force exercée par un ressort sous-entend qu'à tout moment, il est étiré exactement suffisamment pour compenser la force qu'on applique sur lui : cela suppose qu'il n'ait pas d'inertie (sinon il mettrait un certain temps à se déformer ainsi). Pour un ressort massif, la déformation est une onde mécanique qui se propage.

**Exemple :**

Système masse-ressort :



Une masse  $m$  est posée sur une table attachée à un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$ . On suppose qu'elle peut glisser sans frottements. L'équation du mouvement est alors, selon  $x$ ,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

La pulsation propre est donc  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Si on met la masse à la verticale, l'équation devient alors

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

Donc la position d'équilibre est alors  $x_{eq} = \frac{mg}{k}$ .

**Propriété 7 : Pulsation d'un système masse-ressort**

Un système masse-ressort simple oscille à la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{10}$$

Pour plus d'entraînement autour du ressort, voir exercices 18 à 26 et 29 à 32.

**Propriété 8 : Bilan : apparition d'un OH**

Au voisinage d'une position d'équilibre stable, tout système mécanique non dissipatif est équivalent à un oscillateur harmonique, c'est-à-dire à un système masse-ressort. On trouve la position d'équilibre en cherchant l'annulation de la force. On fait ensuite un DL de la force au voisinage de la position d'équilibre, sans prendre la peine de calculer le terme constant, et cela nous permet de conclure quant à la stabilité de la position d'équilibre. C'est également ainsi qu'on obtient la pulsation propre de l'OH.

### 3 Énergie et oscillateur harmonique

Cette section est consacrée à l'énergie, et aux liens qu'elle entretient avec les positions d'équilibre, leur stabilité et l'OH. C'est une autre façon de traiter ce qu'on a vu dans les deux parties précédentes (équilibre, stabilité, pulsation propre), qu'il faut également maîtriser car elle éclairante.

Vous le reverrez en mécanique, mais l'un des théorèmes fondamentaux de la mécanique est le théorème de l'énergie mécanique (TEM). On l'écrit ici dans le cas particulier où les forces sont conservatives. Qu'est-ce qu'une force conservative ? Vous le verrez en mécanique. Ici, on

ne s'en soucie pas, car en une seule dimension, si la force dépend de la position uniquement, elle est conservative. On a donc :

$$E_c + E_p = \text{cste} \quad (11)$$

Où

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (12)$$

Et

**Définition 2 : Énergie potentielle**

$$E_p = - \int F(x)dx \quad (13)$$

N'ayez pas peur de l'intégrale! Pour le calcul, il s'agit uniquement d'une primitive. C'est-à-dire que  $\int^x F(x)dx$  est une fonction dont la dérivée vaut  $F(x)$ . Pour un monôme  $x^n$ , une primitive est  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ , et la primitive de  $\sin(x)$  est  $-\cos(x)$ . Vous pouvez vérifier que l'on retrouve le PFD en dérivant le théorème de l'énergie mécanique.

On a donc

$$F(x) = - \frac{dE_p}{dx} \quad (14)$$

Cela veut dire que

**Propriété 9 : Sens de la force**

La force pointe dans la direction de diminution de l'énergie potentielle

Et aussi que l'énergie potentielle est définie à une constante près. Dans la suite, on omettra donc savamment toutes les constantes. Voici les deux énergies potentielles qu'il faut connaître :

Énergie potentielle de pesanteur (pour un axe  $z$  orienté vers le haut) :

$$E_{pp} = mgz \quad (15)$$

Énergie potentielle d'interaction élastique :

$$E_{pel} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (16)$$

Tout ça pour dire qu'on a une deuxième équation dont la solution est un oscillateur harmonique (notre combinaison de  $\cos$  et de  $\sin$ ) :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 = \text{cste} \quad (17)$$

Cela n'est pas à connaître, mais il faut simplement se souvenir que lorsqu'on voit une équation de la forme  $\dot{x}^2 + \omega^2x^2 = \text{cste}$ , il faut penser à dériver.

**Méthode 4 : Équations différentielles quadratiques**

Cette propriété n'est pas à connaître pour le test, elle est plus utile à l'internationale. Si on a une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}^2 + V(x) = \text{cste} \tag{18}$$

Que l'on sait difficilement résoudre, il faut penser à dériver. C'est le passage entre le TEM et le PFD.

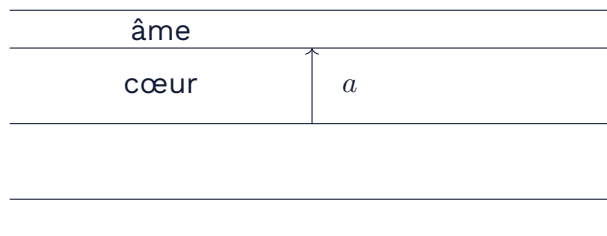
C'est encore une raison pour laquelle l'oscillateur harmonique est extrêmement important en physique : il couple  $f$  et  $f'$  de manière symétrique. Quand vous étudierez la mécanique analytique, on étudie les coordonnées  $(p, q)$ , avec  $p$  la quantité de mouvement, et  $q$  la position. Le couplage entre ces deux variables est symétrique dans l'énergie pour un oscillateur harmonique. Et c'est l'énergie, qu'on appelle le Hamiltonien, qui permet de trouver les équations du mouvement.

**Exemple :**

L'exemple suivant est long, technique, mais très instructif. Il enseigne à reconnaître la structure d'une équation d'OH même dans des situations a priori très éloignées de la mécanique. Il n'est pas à savoir refaire.

Fibre à gradient d'indice :

On se place dans une fibre optique, c'est-à-dire un cylindre constitué d'un cœur transparent et d'une âme réfléchissante :



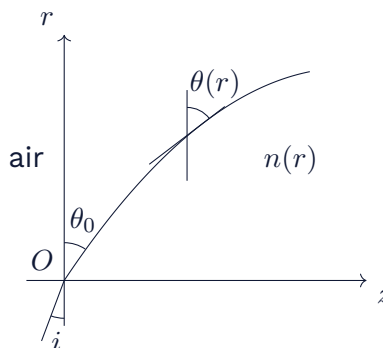
On suppose que l'indice optique varie en fonction de la distance à l'axe central de la façon suivante :

$$n(r) = n_0 \sqrt{1 - 2\Delta \frac{r^2}{a^2}} \tag{19}$$

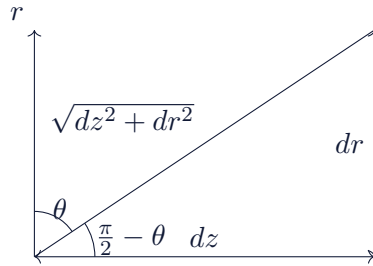
On cherche  $r(z)$ . On admet la loi de Snell-Descartes en continu :

$$n(r) \sin(\theta(r)) = n_0 \sin(\theta_0) \tag{20}$$

On la retrouve en faisant un raisonnement infinitésimal, de proche en proche.



Que vaut  $\sin(\theta(r))$  ? Faisons un schéma.



En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que  $\sin(\theta(r)) = \frac{dz}{\sqrt{dz^2+dr^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+r'(z)^2}}$ .

L'équation différentielle est donc

$$n(r) \frac{1}{\sqrt{1+r'(z)^2}} = n_0 \sin(\theta_0)$$

$$\frac{n(r)^2}{1+r'(z)^2} = n_0^2 \sin^2(\theta_0)$$

$$n(r)^2 = n_0^2 \sin^2(\theta_0)(1+r'(z)^2)$$

$$n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{a^2}\right) = n_0^2 \sin^2(\theta_0)(1+r'(z)^2)$$

$$\sin^2(\theta_0)r'(z)^2 + 2\Delta \frac{r^2}{a^2} = 1 - \sin^2(\theta_0)$$

$$r'(z)^2 + \frac{2\Delta}{\sin^2(\theta_0)a^2}r^2 = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$$

Avec  $k = \frac{\sqrt{2\Delta}}{\sin(\theta_0)a}$ , on retrouve :

$$r'^2 + k^2 r^2 = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$$

Donc la solution est de la forme :

$$r(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

On a pour conditions initiales  $r(z=0) = 0$ ,  $r'(z=0) = \frac{\cos^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta_0)}$ . La solution est donc finalement de la forme

$$r(z) = \frac{\cos(\theta_0)}{k \sin(\theta_0)} \sin(kz)$$

**À retenir :**

-Savoir reconnaître des équations type énergie, même en dehors de la mécanique, et penser à dériver si on ne sait pas les résoudre autrement.

-Pour les épreuves internationales, le calcul des angles faits par une courbe à partir de ses dérivées est à savoir refaire. C'est cependant totalement au-delà du test de présélection.

Pour plus d'entraînement autour du lien TEM-PFD, voir exercice 46 et problème 3.

### 3.1 Énergie, équilibre et stabilité

On a donc un système caractérisé par une énergie potentielle  $E_p(x)$  et une force  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ . Toutes nos discussions sur les équilibres s'appliquent ! Il ne reste qu'à transposer tout ça.

#### Équilibre

Il s'agit donc d'un point d'annulation de la force, donc de la dérivée de l'énergie potentielle. C'est-à-dire :

#### Propriété 10 : Équilibre et énergie

Un point d'équilibre est un extremum local de l'énergie potentielle.

#### Stabilité

Supposons que la position d'équilibre soit stable. La force est donc décroissante. Cela veut dire que pour  $x > x_{eq}$ ,  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx} < 0$ , donc l'énergie potentielle est croissante pour  $x > x_{eq}$ . De même, pour  $x < x_{eq}$ ,  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx} > 0$  donc l'énergie potentielle est décroissante pour  $x < x_{eq}$ . Donc

#### Propriété 11 : Équilibre stable et énergie potentielle

Un point d'équilibre stable est un minimum local de l'énergie potentielle.

De même :

#### Propriété 12 : Équilibre instable et énergie potentielle

Un point d'équilibre instable est un maximum local de l'énergie potentielle.

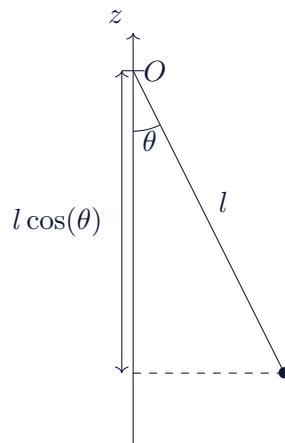
#### Exemple :

Pendule simple (tous les aspects du pendule sont à comprendre et à savoir refaire à la vitesse de l'éclair) :

L'énergie potentielle du pendule simple est

$$E_p = mgz$$

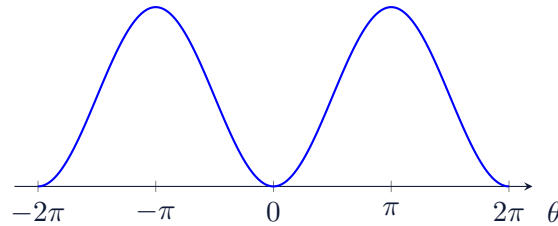
Que vaut  $z$  ? Faisons un schéma pour le voir.



Donc  $z = -l \cos(\theta)$ . D'où :

$$E_p = -mgl \cos(\theta)$$

Représentons cette énergie potentielle :



Énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $\theta$ .

Il y a donc une position d'équilibre instable,  $\theta = \pi$ , et une position d'équilibre stable (que l'on attendait bien),  $\theta = 0$ , comme on l'a déjà vu.

Pour plus d'entraînement sur les liens entre énergie et stabilité, voir exercices 40 et 41.

### Voisinage d'une position d'équilibre

On a vu qu'au voisinage d'une position d'équilibre, on a

$$F(x) \approx \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Cela devient, en termes d'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx} \approx \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

En primitivant une fois, on trouve que l'on a fait le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, c'est-à-dire qu'on l'a parabolisée :

$$E_p \approx \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 \tag{21}$$

Se ramener à l'oscillateur harmonique, c'est linéariser la force, et c'est aussi paraboliser l'énergie potentielle. On a donc l'équivalence :

**Point d'équilibre**  $\Leftrightarrow$  **Annulation de la force**  $\Leftrightarrow$  **Extremum de l'énergie potentielle**

**Stabilité**  $\Leftrightarrow$  **Force décroissante**  $\Leftrightarrow$  **Minimum de l'énergie potentielle**

Ces affirmations ne font aucune hypothèse sur la forme de la force, sur la proximité du système avec la position d'équilibre, bref elles sont vraies en dehors des hypothèses de l'OH. L'OH est une approximation où on linéarise le système, à laquelle on peut se ramener dans les cas suivants :

**Système mécanique au voisinage d'une position d'équilibre stable**  $\Leftrightarrow$  **DL1 de la force (linéarisation)**  $\Leftrightarrow$  **DL2 de l'énergie potentielle (parabolisation)**  $\Leftrightarrow$  **Oscillateur Harmonique**

Et finalement on a une deuxième condition énergétique pour la stabilité des positions d'équilibre :

**Propriété 13 : Stabilité et énergie potentielle**

Un point d'équilibre est stable si et seulement si  $\left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_{eq}} > 0$ .

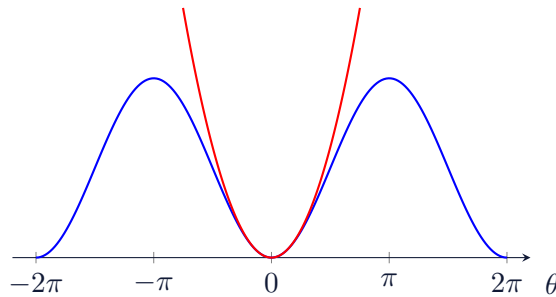
Et pour un système mécanique au voisinage de  $x_0$  position d'équilibre stable, on a un ressort équivalent de raideur :

$$k = \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} \tag{22}$$

**Exemple :**

Pendule simple :

On se rappelle qu'on a  $E_p = -mgl \cos(\theta)$ . On fait le DL à l'ordre 2 en voisinage de 0 :  $E_p = \frac{1}{2}mgl\theta^2$  (en faisant disparaître la constante). Cela revient à paraboliser l'énergie potentielle, ce qui est une bonne approximation près du point d'équilibre stable :



Énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $\theta$  en bleu, et son approximation parabolique en rouge.

L'énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ . Donc l'équation différentielle est :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta^2 = cste$$

On retrouve  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Pour explorer le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, voir problème 1.

**Méthode 5 : Bilan : Déterminer une position d'équilibre et sa stabilité**

Pour une équation de la forme :

$$\ddot{x} \text{ ou } \dot{x} = f(x)$$

On a deux façons de trouver une position d'équilibre :

- Trouver un point d'annulation de  $f$ .
- Si c'est une équation avec  $\ddot{x}$  (typiquement, une équation mécanique), trouver un extremum de l'énergie potentielle

Ensuite, pour déterminer sa stabilité on peut :

- Déterminer la monotonie de  $f$  en  $x_{eq}$  (stable si  $f$  est décroissante, instable si  $f$  est croissante).
- Faire un DL de  $f$  au voisinage de  $x_{eq}$ . Le signe du résultat nous indique alors la monotonie de  $f$ . Pour une équation mécanique, cela permet également de trouver la pulsation des petites oscillations.
- Dans le cas d'une équation mécanique, on peut chercher si  $x_{eq}$  est un minimum ou un maximum de l'énergie potentielle (stable pour un minimum, instable pour un maximum). On peut faire cette recherche en faisant un DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, ce qui donne également la pulsation des petites oscillations.

La question naturelle qui se pose est : quelle méthode choisir à quel moment ? Il n'y a pas de réponse simple à cette question, mais votre but doit toujours être de faire le moins de calculs possibles. Si on vous demande la stabilité mais pas la pulsation des petites oscillations, il peut être intelligent de regarder la monotonie plutôt que de faire un DL. Cependant parfois il n'est pas simple de lire la monotonie, et donc il faut quand-même faire un DL. Pour choisir entre l'utilisation de l'énergie ou de la force, cela va dépendre de laquelle est la plus simple et la plus naturelle à utiliser dans le contexte de l'exercice.

## 4 Aller plus loin que l'oscillateur harmonique

On va maintenant regarder deux phénomènes qui utilisent l'oscillateur harmonique, en le rendant encore plus riche, puis on explorera au-delà des hypothèses de l'OH. Les paragraphes 4.1 et 4.2 sont utiles pour le test, le 4.3 ne l'est pas, il est surtout là pour votre culture scientifique et votre curiosité.

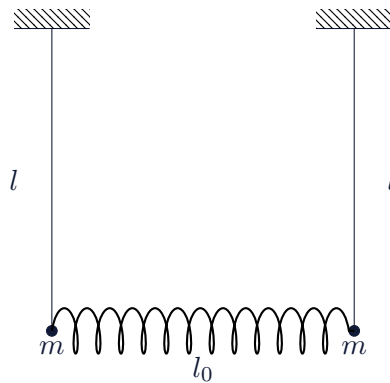
### 4.1 Oscillateurs couplés

Rien ne sera démontré ici, pour les démonstrations, voir l'exercice 26. Pour une illustration, voir <https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso>.

Les oscillateurs couplés sont un exemple intéressant, surtout utile pour le réseau cristallin biatomique (voir problème 2). C'est bien de l'avoir vu une fois, mais a priori pas de quoi en mettre dans le cours. Cependant, ils tombent au test de présélection, et avoir quelques connaissances dessus peut vous faire gagner énormément de temps, donc voici l'essentiel à connaître pour aller vite.

On considère donc deux oscillateurs harmoniques identiques (par exemple deux systèmes masse ressort avec la même raideur et la même longueur à vide, ou deux pendules simples de

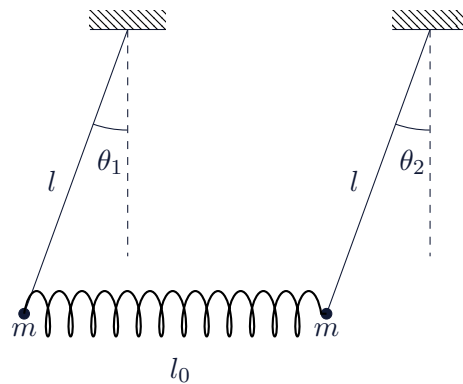
même longueur). On leur associe donc une pulsation propre  $\omega_0$ . On les couple à l'aide d'un oscillateur, typiquement un ressort, de raideur  $k'$  et de longueur à vide  $l_0$ . Exemple :



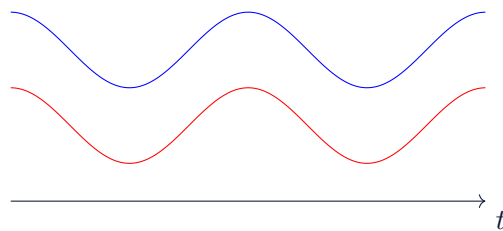
Ce système a 2 modes propres.

**Mode symétrique**

Il s'agit du mode où, à une constante près, la position de l'oscillateur 1 est égale à la position de l'oscillateur 2 :

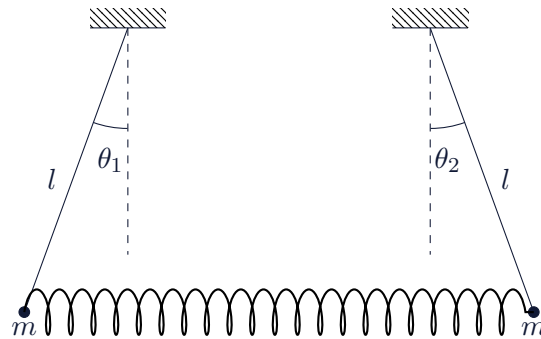


C'est le mode où l'oscillateur de couplage reste à sa longueur à vide. La pulsation de ce mode propre est donc  $\omega_0$  : il n'y a pas de transfert d'énergie entre les deux oscillateurs. On prépare ce mode en imposant comme conditions initiales la même différence par rapport à la position d'équilibre pour les deux oscillateurs.

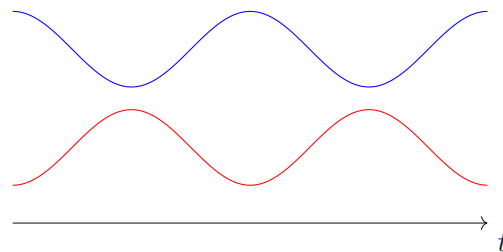


**Mode antisymétrique**

Il s'agit du mode où, à une constante près, la position de l'oscillateur 1 est l'opposée de la position de l'oscillateur 2 :



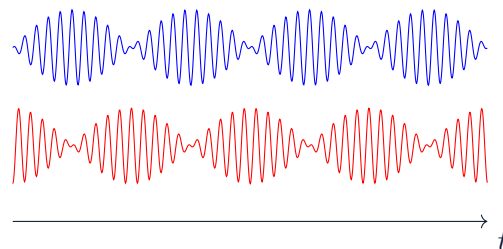
La pulsation de ce mode,  $\omega_1$  est nécessairement plus grande qu'  $\omega_0$  : on peut le voir sur cet exemple, quand les pendules s'écartent, le ressort les retient, ce qui diminue le temps d'une période, augmentant  $\omega$ . Mais plus généralement, la pulsation d'un oscillateur est toujours croissante de la force de rappel qu'il subit ( $\sqrt{\frac{k}{m}}$  est croissant de  $k$ ,  $\sqrt{\frac{g}{l}}$  est croissant de  $g$ ), et on impose une force supplémentaire, cela fait donc augmenter la pulsation propre. Sa valeur exacte dépend de la situation. Pour la calculer, on pose les équations du mouvement, puis on les simplifie en supposant que le mode est antisymétrique (par exemple en écrivant  $\theta_1 = -\theta_2$ ). Dans ce mode, l'oscillateur de couplage emmagasine périodiquement de l'énergie, puis la rend de manière symétrique aux deux oscillateurs. On prépare ce mode en imposant comme conditions initiales une différence opposée à la position d'équilibre pour chacun des oscillateurs.



La raison pour laquelle on étudie ces deux modes est que la solution générale est une superposition de ces deux modes propres, donc une superposition d'oscillations à  $\omega_0$  et à  $\omega_1$ .

**Faible couplage : phénomène de battements**

Si le couplage est faible, c'est-à-dire que l'oscillateur de couplage a une pulsation propre très faible devant la pulsation propre des deux autres oscillateurs, la pulsation  $\omega_1$  du mode antisymétrique est très proche de  $\omega_0$  (quand il y a très peu de couplage, on doit se rapprocher de la situation où il n'y a pas de couplage). La solution générale est donc une somme de deux oscillations proches, ce qui donne lieu à un phénomène de battements.



La fréquence rapide est donc environ  $\omega_0$ , et la fréquence des battements est  $|\omega_1 - \omega_0| = \omega_1 - \omega_0$ , qu'on peut généralement simplifier à l'aide d'un développement limité (puisque les deux pulsations sont proches, et qu'on suppose un faible couplage, ce qui permet d'exhiber un paramètre très petit devant 1). On les observe par exemple en ne déplaçant initialement qu'un des deux oscillateurs de sa position d'équilibre. Dans ce cas ils sont en opposition de phase, le ressort permet un transfert d'énergie périodique entre les deux oscillateurs.

Les oscillateurs couplés sont abordés dans les exercices 27 et 28.

## 4.2 Oscillateur harmonique amorti

Je ne pense pas que la connaissance des solutions exactes soit vraiment dans l'esprit des IPhOs, sachant qu'aux épreuves internationales ils rappellent la solution pour les équations  $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ , et que c'est vraiment du travail technique de Bac+1. Cependant, l'oscillateur harmonique amorti est mentionné dans le syllabus, il est donc nécessaire d'avoir quelques connaissances qualitatives dessus.

On a dit que l'oscillateur harmonique ne prenait pas en compte les frottements. Nous allons désormais examiner ce qui se passe quand on rajoute un terme de frottements. Pour des mouvements suffisamment lents, on peut considérer les frottements les plus simples possibles, c'est-à-dire des frottements linéaires, en  $-\lambda v$ . On est donc ramené à l'équation différentielle :

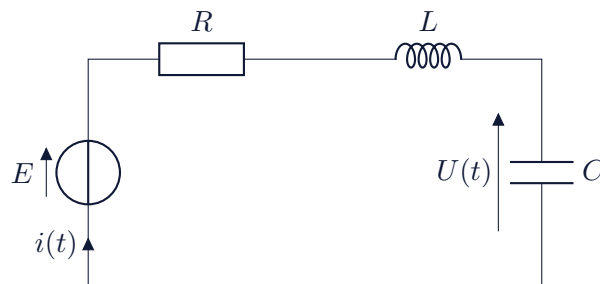
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{23}$$

$Q$  est appelé le facteur de qualité du système. Plus il est grand, plus on se rapproche de l'oscillateur harmonique. Plus il est faible et plus l'amortissement est fort.

Quand on a exhibé  $\omega_0$  et  $Q$  puis qu'on la met sous cette forme, on dit que l'équation est sous forme canonique. Si elle ne l'est pas, on la met sous cette forme.

### Exemple :

Le circuit RLC série : On considère le circuit suivant :



L'équation différentielle est :

$$\ddot{U} + \frac{R}{L} \dot{U} + \frac{1}{LC} U = \frac{E}{LC}$$

On remarque tout d'abord que pour  $R = 0$ , le circuit est un oscillateur harmonique. Le circuit LC est un oscillateur harmonique classique qu'il faut connaître (cf le cours d'électrocinétique). On cherche à mettre l'équation sous forme canonique. On voit que  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . On cherche ensuite  $Q$  tel que :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On se ramène bien à la forme canonique d'une équation du second ordre.

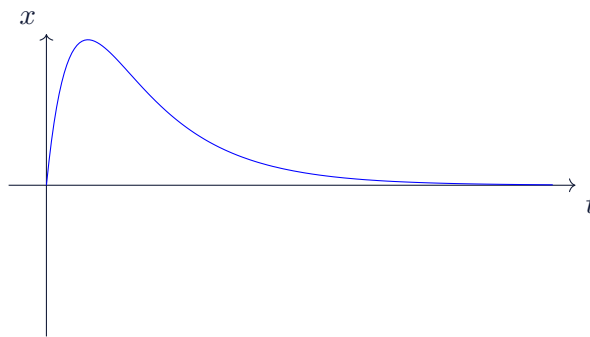
Comme vous le verrez en 5.1.2, pour résoudre l'équation différentielle, il faut résoudre l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \tag{24}$$

Il y a donc trois régimes, à connaître.

**Régime apériodique,  $Q < 1/2$**

Si  $Q < 1/2$ , l'amortissement est si fort que le système n'a pas le temps d'osciller. Le régime est donc apériodique.



Les solutions sont les suivantes :

**Propriété 14 : Régime apériodique**

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \right) > 0 \tag{25}$$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \tag{26}$$

**Régime critique, également apériodique,  $Q = 1/2$**

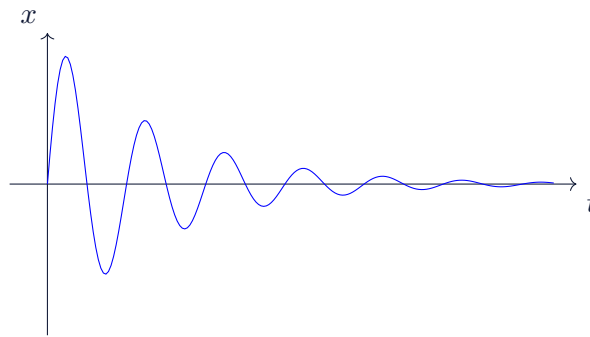
Le régime est également apériodique, la forme mathématique des solutions est simplement différente.

**Propriété 15 : Régime critique**

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} \tag{27}$$

**Régime pseudo-périodique,  $Q > 1/2$**

Si  $Q > 1/2$ , l'amortissement est suffisamment faible pour que le système oscille. Cependant l'amortissement fait tendre la solution vers 0.



Les solutions sont les suivantes :

**Propriété 16 : Régime pseudo-périodique**

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\tau = 2Q/\omega_0$$

$$x(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \tag{28}$$

Et maintenant les choses vraiment importantes à connaître :

- Les solutions oscillent à une pulsation  $\Omega < \omega_0$ , d'autant plus proche de  $\omega_0$  que  $Q$  est grand. Le terme de frottements ralentit le système, il est donc normal que sa pulsation soit plus faible que sa pulsation sans frottements, et plus l'amortissement est faible, plus on se rapproche de la pulsation sans frottements.
- Le facteur de qualité est de l'ordre de  $N$ , le nombre d'oscillations visibles. Par exemple, pour la courbe ci-dessus,  $Q \approx 5$ .
- Dans les trois régimes, la décroissance est exponentielle.
- Moins important à connaître : pour une estimation plus précise  $Q$ , on peut utiliser le décrément logarithmique,  $\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ , avec  $x_1$  et  $x_2$  deux maxima successifs. On a l'approximation  $\delta \approx \frac{\pi}{Q}$ .

L'oscillateur harmonique amorti est traité dans les exercices 45 et 50.

**4.3 Les limites de l'OH**

Cette section n'est pas utile pour le test. Elle peut être intéressante pour satisfaire votre curiosité.

L'OH est une approximation d'un système mécanique, et comme toute approximation, pour l'appliquer, il faut respecter certaines hypothèses. On a déjà étudié, dans le paragraphe précédent, l'hypothèse de non-dissipation. On a vu ce qui se passait quand on avait un OH avec dissipation, et à quelle condition on pouvait supposer qu'il n'y avait pas de dissipation (il fallait pour cela que  $Q \gg 1$ ).

Regardons ensuite la deuxième hypothèse faite pour pouvoir approximer un système par un OH, l'hypothèse de localité, c'est-à-dire l'hypothèse disant qu'on reste proche du point d'équilibre stable. On va essayer de quantifier l'idée de "proche du point d'équilibre", pour savoir quand on peut faire cette approximation. Revenons au DL de l'énergie potentielle, et allons cette fois à l'ordre 3 (en supposant que le point d'équilibre est en 0) :

$$V(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} V(0) + \frac{1}{2}V^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{6}V^{(3)}(0)x^3$$

Comme on l'a vu quand on a parlé des DLs, plus on monte dans les ordres (donc dans les puissances de  $x$ ), plus les termes sont petits, et plus on est précis. Donc si  $V^{(3)}(0) \neq 0$ , quand  $x$  va devenir trop grand pour que le terme d'ordre 2 suffise, le terme qui va devenir pertinent en premier, c'est le terme d'ordre 3. Les termes d'ordre plus grand étant beaucoup plus petits que le terme d'ordre 3, sur une certaine plage de  $x$ , le terme d'ordre 3 va suffire à décrire le système (tout comme sur une certaine plus petite page de  $x$ , le terme d'ordre 2 suffisait). Pour savoir quand le terme d'ordre 3 est négligeable devant le terme d'ordre 2, il suffit de comparer les deux termes dans le DL. L'approximation de l'OH est valable quand :

$$\left| \frac{1}{6}V^{(3)}(0)x_0^3 \right| \ll \left| \frac{1}{2}V^{(2)}(0)x_0^2 \right|$$

$$|x_0| \ll \left| \frac{3V^{(2)}(0)}{V^{(3)}(0)} \right|$$

Qu'est-ce que ce  $x_0$  ? C'est un ordre de grandeur de l'amplitude du mouvement, donc typiquement la plus grande valeur que peut prendre  $|x|$  à partir de l'énergie qu'on lui a donné. Quand cette approximation n'est plus valable, et qu'on a un terme d'ordre 3, on perd beaucoup de choses : les oscillations ne sont plus symétriques (car le potentiel ne l'est plus), donc passer du max de  $x$  à 0 ne prend pas le même temps que de passer de 0 au min de  $x$ , l'oscillateur n'est plus harmonique, c'est-à-dire que la période des oscillations dépend de la condition initiale (voir exercice 36 sur la formule de Borda). Si le terme d'ordre 3 est nul, il faut alors faire la comparaison avec le terme non-nul de plus petit ordre plus grand que 2.

On a fait l'hypothèse que le terme d'ordre 2 dominait dans le cadre de l'OH. On a vu ce qui se passait quand  $x$  devenait trop grand pour que cela reste vrai, voyons maintenant ce qui se passe quand ça n'est pas vrai parce que le terme d'ordre 2 dans l'énergie potentielle est nul. Supposons que  $V^{(2)}(0) = 0$ , et que  $V^{(3)}(0) = 0$  et  $V^{(4)}(0) \neq 0$ . Le terme d'ordre 2 ne peut pas être plus grand que le terme d'ordre 4, donc il n'est pas possible de décrire le système à l'ordre 2. On doit (au moins) aller au plus petit ordre non nul, c'est-à-dire 4. La condition de stabilité reste la même, pour que 0 soit une position d'équilibre stable, il faut qu'il soit un minimum de l'énergie potentielle, ce qui, dans ce cas précis, est équivalent au fait que  $V^{(4)}(0) > 0$ . On approxime donc le potentiel par :

$$V(x) = \frac{1}{24}V^{(4)}(0)x^4$$

On a toujours une position d'équilibre stable, mais le potentiel est "trop plat" pour pouvoir être décrit comme un OH. L'oscillateur est donc anharmonique. On peut en effet montrer que la période d'oscillation, si on lâche cet oscillateur d'une position  $x_0$  sans vitesse initiale, vaut :

$$T = \frac{8\sqrt{3}}{|x_0|} \sqrt{\frac{m}{V^{(4)}(0)}} I$$

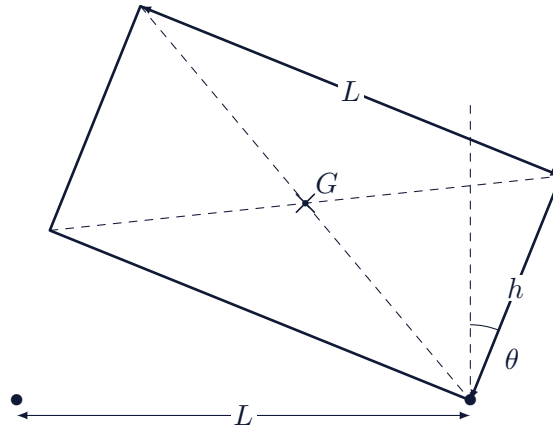
(avec  $I$  une constante numérique sans dimension). Elle dépend clairement de la position initiale.

Regardons maintenant une dernière hypothèse que nous avons faite pour pouvoir approximer un système mécanique par un OH. Si vous vous rappelez de l'équation 4 de la partie 2, on avait, pour pouvoir se ramener à un OH, écrit, au voisinage d'une position d'équilibre :

$$m\ddot{x} \approx \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Cela suppose que la force soit dérivable en  $x_0$  ! Et donc que l'énergie potentielle soit deux fois dérivable en  $x_0$  ! Regardons quelques exemples où ce n'est pas le cas, pour constater que ces systèmes ne sont pas approximables par un OH.

Oral X MP 2019 : On considère un wagon de hauteur  $h$  sur deux rails éloignés de  $L$ . À cause des irrégularités des rails, le wagon sera poussé de temps en temps vers la gauche ou vers la droite, le faisant pencher d'un côté ou de l'autre des rails.



La mécanique du solide nous permet de dire que l'énergie mécanique du wagon s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + E_{ppG}$$

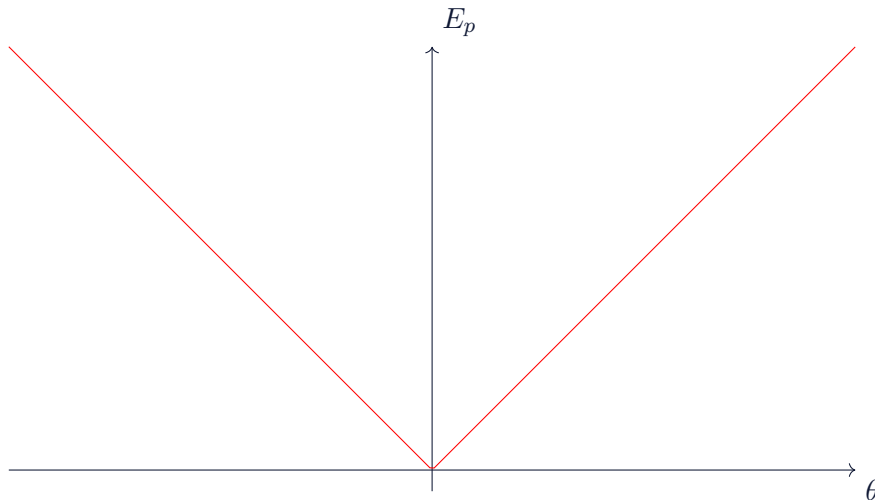
Où  $J$  est le moment d'inertie du wagon par rapport à l'axe orthogonal au plan de la feuille passant par le rail, et  $E_{ppG} = mgz_G$  est l'énergie potentielle de pesanteur d'un objet de masse  $m$  (la masse du wagon) positionné en  $G$ , le centre d'inertie du wagon. C'est un bon exercice de géométrie d'essayer de calculer  $z_G$ , cela donne :

$$E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{mg}{2} (L|\sin(\theta)| + h \cos(\theta))$$

Si on suppose que les chocs contre les rails quand le wagon redevient droit sont élastiques, donc ne dissipent pas d'énergie (plus la vitesse est faible, plus c'est vrai, et il semble naturel de supposer que la vitesse est faible, puisqu'on sait qu'un wagon ne penche pas énormément (sinon on tomberait tout le temps dans le train) et qu'on sait que la fréquence n'est pas trop élevée (sinon on entendrait un tikitikitiki très rapide)), alors on peut dire que l'énergie totale est conservée. Approximons l'énergie potentielle pour  $|\theta| \ll 1$  :

$$E_{ppG} = \frac{mg}{2} (L|\sin(\theta)| + h \cos(\theta)) \underset{|\theta| \ll 1}{=} \frac{mg}{2} (L|\theta| + h)$$

On voit que 0 est un minimum de l'énergie potentielle, donc que c'est une position d'équilibre stable (ouf, sinon on aurait une très mauvaise nouvelle pour la SNCF). Cependant l'énergie potentielle n'est pas deux fois dérivable, on ne peut donc pas l'approximer par une parabole :



Graphes de l'énergie potentielle pour de petites valeurs de  $\theta$

Il est clair qu'aucune parabole ne peut approximer cette énergie potentielle, puisqu'une parabole est plate en 0. On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2}|\theta| = \text{cste}$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{J}|\theta| = \text{cste}$$

On pose donc  $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$ , et on dérive pour obtenir :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{\omega^2}{2} & \text{si } \theta > 0 \\ \ddot{\theta} = \frac{\omega^2}{2} & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

Si on suppose par exemple que  $\theta(t = 0) = \theta_0 > 0$  et que  $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ , on peut intégrer ces équations pour trouver que

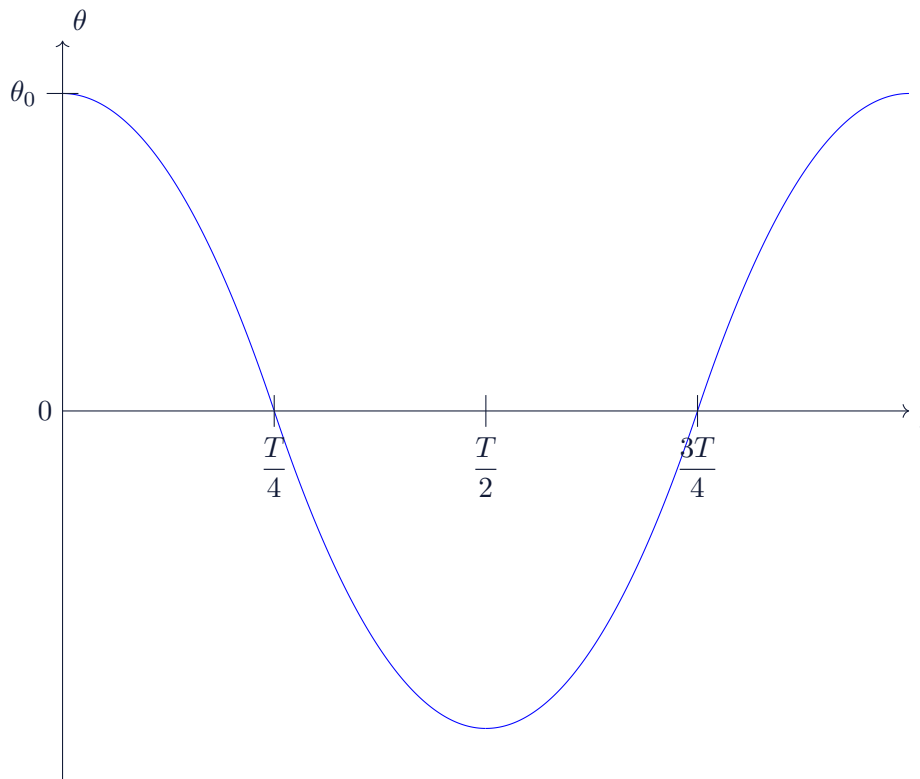
$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{\omega^2 t^2}{4}$$

Tant que  $\theta > 0$ . Ce qui veut dire que  $\theta$  passe par l'origine à un temps  $\tau$  qui vaut un quart de la période :

$$\frac{T}{4} = \frac{\sqrt{4\theta_0}}{\omega}$$

$$T = \frac{8\sqrt{\theta_0}}{\omega}$$

On a donc bien un oscillateur, mais totalement anharmonique,  $T$  dépend fortement de la condition initiale, et puisque c'est en  $\sqrt{\theta_0}$ , d'autant plus fortement que  $\theta_0$  est petit. On ne se rapproche donc pas d'un comportement d'OH. Par ailleurs, on voit que n'importe quelle période entre 0 et  $+\infty$  est possible, ce qui n'est pas un comportement d'oscillateur harmonique (qui ne peut osciller qu'à une seule pulsation).



Graphes d'une solution

On dirait un sinus, mais en fait pas du tout, ce sont des portions de paraboles juxtaposées. Pour vérifier que vous avez bien compris, vous pouvez faire une étude similaire pour une bille dans un puits en forme de V (en une dimension).

## 5 Bonus

Le contenu de cette section est purement pour votre culture, rien n'est à connaître. Pour le test, il peut cependant être utile d'avoir lu le 5.1.1, juste au cas où. Pour les épreuves internationales, il peut être utile de lire les paragraphes 5.1 (surtout l'exemple du piège de Penning), 5.2 et 5.4. Le 5.5 est uniquement là pour vous montrer que l'OH est universel et ne se limite pas à nos problèmes à une dimension. Cependant, vous ne pouvez (ni ne devez) pas tout comprendre et ça ne pose aucun problème.

### 5.1 Résoudre une équation différentielle linéaire

#### 5.1.1 Systèmes d'équations linéaires

En 2025 dans le test de présélection français des IPhOs, sujet pour terminales, il fallait résoudre le système d'équations différentielles couplées suivant sur deux intensités électriques  $I_1$  et  $I_2$  :

$$\begin{cases} \frac{d^2 I_1}{dx^2} = \frac{I_1}{d_1^2} - \frac{I_2}{d_2^2} \\ \frac{d^2 I_2}{dx^2} = \frac{I_2}{d_2^2} - \frac{I_1}{d_1^2} \end{cases}$$

Dans le cas  $d_1 = d_2 = d$ , avec comme conditions aux limites  $I_1(0) - I_2(0) = I_1(L) - I_2(L) = I_0$ ,  $I_1(0) + I_2(0) = I_1(L) + I_2(L) = I_0$ . On va donc voir quelques méthodes pour résoudre des systèmes d'équations différentielles linéaires couplées dans des cas simples.

Vous remarquerez que quand  $d_1 = d_2 = d$ , le couplage entre  $I_1$  et  $I_2$  est symétrique ; c'est-à-dire que le contenu de la deuxième équation se déduit de la première en échangeant les rôles de  $I_1$  et  $I_2$  :

$$\begin{cases} \frac{d^2 I_1}{dx^2} = \frac{I_1}{d^2} - \frac{I_2}{d^2} \\ \frac{d^2 I_2}{dx^2} = \frac{I_2}{d^2} - \frac{I_1}{d^2} \end{cases}$$

### Méthode 6 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage symétrique

Dans le cas d'un système d'équations différentielles à couplage symétrique :

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} = af + bg \\ \frac{d^2 g}{dx^2} = ag + bf \end{cases}$$

Poser  $S = f + g$  et  $D = f - g$ . Les équations obtenues sur  $S$  et  $D$  sont alors découplées. Cette méthode fonctionne aussi si le système est d'ordre 1. La présence de constantes dans les équations ne doit pas changer la méthode, cela impliquera simplement des constantes dans les équations différentielles découplées, qui peuvent être traitées comme n'importe quelle équation avec second membre.

#### Exemple :

Reprenons notre système dans le cas symétrique :

$$\begin{cases} \frac{d^2 I_1}{dx^2} = \frac{I_1}{d^2} - \frac{I_2}{d^2} \\ \frac{d^2 I_2}{dx^2} = \frac{I_2}{d^2} - \frac{I_1}{d^2} \end{cases}$$

Soit  $S = I_1 + I_2$ ,  $D = I_1 - I_2$ .

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{d^2 I_1}{dx^2} + \frac{d^2 I_2}{dx^2} = \frac{1}{d^2} (I_1 + I_2 - I_1 - I_2) = 0$$

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = \frac{d^2 I_1}{dx^2} - \frac{d^2 I_2}{dx^2} = \frac{1}{d^2} (I_1 - I_2 - I_2 + I_1) = \frac{2}{d^2} D$$

Donc  $S(x) = Ax + b$ ,  $b = I_1(0) + I_2(0) = I_0$ ,  $AL + b = I_1(L) + I_2(L) = I_0$ , donc  $S(x) = I_0$ .

$D(x) = \lambda e^{\sqrt{2}x/d} + \mu e^{-\sqrt{2}x/d}$ ,  $D(0) = \lambda + \mu = I_0$  et  $\lambda e^{\sqrt{2}L/d} + \mu e^{-\sqrt{2}L/d} = I_0$ . Donc  $D(x) = \frac{I_0}{1 + e^{-\sqrt{2}L/d}} (e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/d})$ .

$$I_1(x) = \frac{S(x) + D(x)}{2} = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{2}L/d}} (e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/2}) \right)$$

$$I_2(x) = \frac{S(x) - D(x)}{2} = \frac{I_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{2}L/d}} (e^{-\sqrt{2}x/d} + e^{\sqrt{2}(x-L)/2}) \right)$$

Si le système est à couplage antisymétrique, on passe par les complexes :

**Méthode 7 : Systèmes d'équations différentielles linéaires à couplage anti-symétrique**

Un système à couplage antisymétrique est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = bg \\ \frac{dg}{dx} = -bf \end{cases}$$

On pose alors  $u = f + ig$ . On obtient une équation différentielle sur  $u$  que l'on peut résoudre avec les méthodes vues plus haut. Cette méthode marche aussi pour les systèmes d'ordre 2.

**Exemple :**

Particule chargée dans un champ magnétique uniforme :

Si l'on considère une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ , les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \end{cases}$$

Et  $\dot{z} = \dot{z}_0$ , avec  $\omega_c = -\frac{qB_0}{m}$

Soit  $u = x + iy$ .  $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c \dot{y} - i\omega_c \dot{x} = -i\omega_c(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega_c \dot{u}$ .

$$\dot{u}(t) = \dot{u}_0 e^{-i\omega_c t}$$

$$u(t) = \frac{i\dot{u}_0}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + c_0$$

La projection du mouvement dans le plan  $z = 0$  est circulaire uniforme de rayon  $\frac{v_0}{\omega_c}$ , de pulsation  $\omega_c$  et de centre  $c_0$ .

**5.1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  à coefficients constants**

**Propriété 17 : Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants**

Si vous avez une équation linéaire homogène (c'est-à-dire sans second membre, avec uniquement des termes en  $\frac{d^k f}{dx^k}$ ) d'ordre  $n$ , de la forme

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = 0 \tag{29}$$

les solutions sont de la forme

$$f(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \dots + \lambda_n e^{r_n x}$$

avec  $r_1, \dots, r_n$  les racines du polynôme caractéristique  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

Cela n'est vrai que si toutes ces racines sont distinctes, mais un peu de topologie et de théorie de la mesure nous permet de dire que les racines sont presque toujours distinctes, c'est-à-dire que la probabilité que ce ne soit pas le cas est nulle. Ces racines sont souvent

complexes, mais ça ne pose aucun problème, on se ramène au cas réel à l'aide des conditions initiales.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a

$$r^2 = -\omega^2$$

Donc  $r = \pm i\omega$  Ainsi les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \\ &= A(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + B(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \\ &= (A + B) \cos(\omega t) + i(A - B) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Pour les équations avec second membre, soit

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = g(x) \tag{30}$$

On cherche toujours une solution particulière pour l'additionner à la solution de l'équation homogène. La solution particulière doit être cherchée de la même forme que le second membre : polynôme de degré  $d$  si  $g$  est un polynôme de degré  $d$ , combinaison linéaire de cosinus et sinus si  $g$  l'est aussi, un polynôme de degré  $d$  fois une exponentielle si  $g$  est de cette forme...

Et à la fin, on détermine les constantes avec les conditions initiales sur  $f$  et ses dérivées d'ordre 1 à  $n - 1$ .

**Exemple :**

Le piège de Penning :

On souhaite piéger un électron en  $(0, 0)$ . Le plus simple serait avec un champ électrique, puisque l'énergie potentielle est alors  $E_p = -eV(x, y, z)$ . Il suffirait d'avoir un potentiel électrostatique dont le maximum serait en  $(0, 0)$ . Cependant les équations de Maxwell, précisément l'équation de Poisson, rendent ce fait impossible. En effet :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Si  $V$  admettait un maximum, ce serait un maximum dans toutes les directions, donc il faudrait avoir  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} > 0$  en ce point, ce qui est impossible. On veut donc commencer par le piéger dans le plan  $z = 0$ . On choisit un potentiel de la forme  $V(x, y, z) = \frac{V_0}{z_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$  (qui respecte l'équation de Poisson) avec  $V_0 > 0$ . On voit que  $(0, 0)$  est un maximum de  $V$  dans la direction  $z$ . Cela donne une force :

$$\vec{F} = -e\vec{E} = \frac{2eV_0}{z_0^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$$

Puisque l'on peut déjà stabiliser l'électron dans la plan  $z = 0$ , on ne va s'intéresser qu'à  $x$  et  $y$ . Le piège de Penning consiste à introduire un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ . On obtient alors l'équation différentielle suivante sur  $u = x + iy$  :

$$\ddot{u} + \omega_c \dot{u} - \omega_0^2 u = 0$$

Avec  $\omega_c = -\frac{eB_0}{m_e}$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2eV_0}{z_0^2}}$ . L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \omega_c r - \omega_0^2 = 0$$

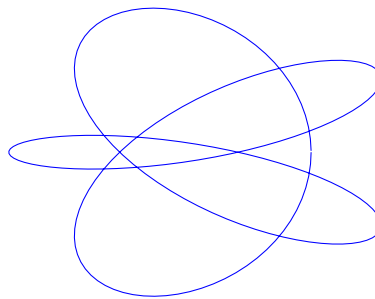
de discriminant :  $\Delta = -\omega_c^2 + 4\omega_0^2$ . Si  $\Delta > 0$ , une des racines est  $r = \frac{1}{2}(i\omega_c + \sqrt{\Delta})$ , de partie réelle strictement positive, donc  $e^{rt}$  diverge. Il faut donc, si l'on veut confiner l'électron, avoir  $\Delta \leq 0$ , i.e.  $\omega_c \geq 2\omega_0$ . La solution est donc de la forme :

$$u(t) = \lambda e^{\frac{i}{2}(-\omega_c - \sqrt{|\Delta|})t} + \mu e^{\frac{i}{2}(-\omega_c + \sqrt{|\Delta|})t}$$

On suppose qu'on a comme conditions initiales  $u(t=0) = d_0$  et  $\dot{u}(t=0) = iv_0$ . Cela donne le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = d_0 \\ \frac{i}{2}(-\omega_c - \sqrt{|\Delta|})\lambda + \frac{i}{2}(-\omega_c + \sqrt{|\Delta|})\mu = iv_0 \end{cases}$$

Que l'on peut résoudre pour obtenir les équations horaires. Il s'agit de la somme de deux rotations, à deux pulsations différentes, possiblement dans deux sens opposés, possiblement avec deux rayons différents, mais de même centre. L'électron reste donc confiné dans le voisinage de (0,0), alors même qu'il ne s'agit pas d'un minimum de l'énergie potentielle.



Mouvement d'un électron dans le piège de Penning

**À retenir :**

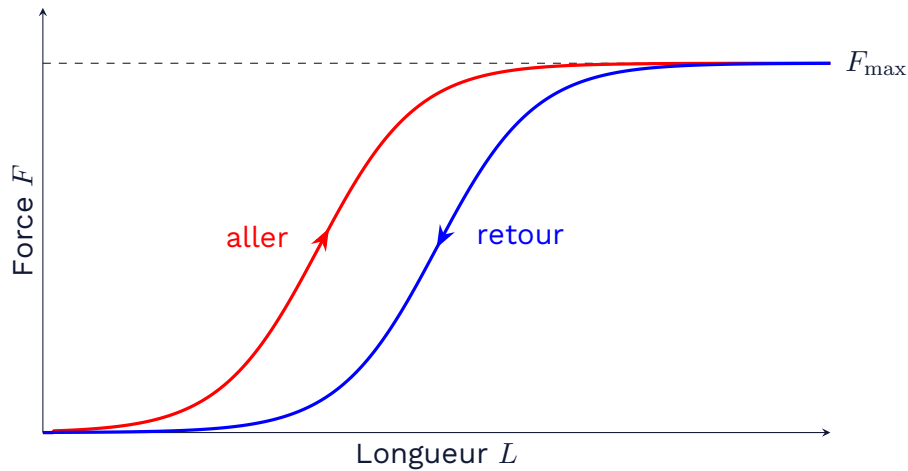
À l'aide de forces non-conservatives, on peut rendre stable une position d'équilibre qui n'est pas un minimum de l'énergie potentielle. C'est par exemple ce qui se passe quand vous posez une gomme sur une table. La table n'est jamais parfaitement plate, donc a priori la gomme devrait glisser d'un côté, mais la présence de frottements solides rend cette position stable.

**5.2 Hystérésis**

Pour voir une illustration à peu près parfaite de ce phénomène, je vous conseille ce problème d'IPhOs : [https://ipho.olimpicos.net/pdf/IPh0\\_2016\\_Q2.pdf](https://ipho.olimpicos.net/pdf/IPh0_2016_Q2.pdf) (il vous faudra avoir suivi la séance d'électrocinétique).

L'hystérésis est une conséquence fréquente de non-linéarités. Il s'agit d'un phénomène où l'état à un instant  $t$  ne dépend pas seulement de ses caractéristiques à cet instant, mais aussi de son histoire. Exemple typique : un élastique réel. Si vous tirez une première fois dessus, étiré à une certaine longueur, il exerce une certaine force. Puis vous tirez très très fort dessus (sans le casser!), si bien que vous le distendez. Vous revenez alors à la même longueur, la force exercée par l'élastique est plus faible qu'à l'aller. Ce phénomène n'est possible que parce

que l'élastique est non-linéaire, car il faut pouvoir modifier ses caractéristiques de manière permanente. On peut alors dessiner ce genre de graphes, typique de ce qu'on appelle un cycle d'hystérésis :



Un cycle d'hystérésis d'un élastique réel

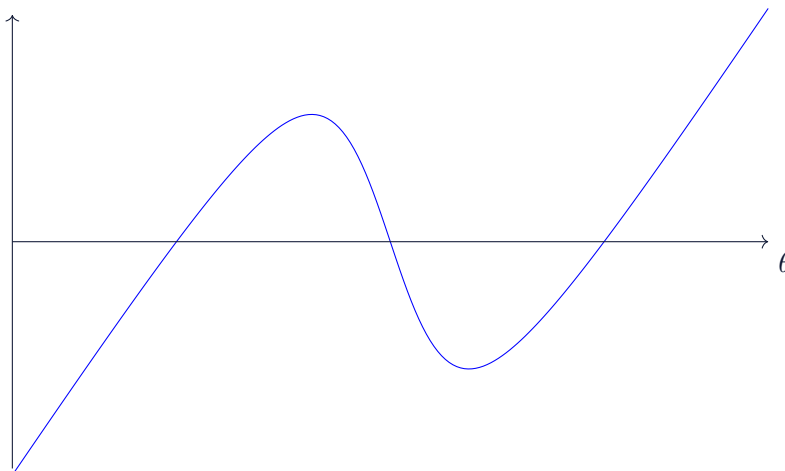
Ce genre de phénomènes arrive typiquement quand on a de la bistabilité (quand deux positions d'équilibre sont stables, et que le système doit choisir l'une ou l'autre), ce qui est la raison pour laquelle on l'étudiera dans ce cours. Reprenons l'exemple évoqué en 1.1 de la rotation de l'ATP-synthase. On avait l'équation mécanique suivante :

$$J\ddot{\theta} = \alpha - k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$$

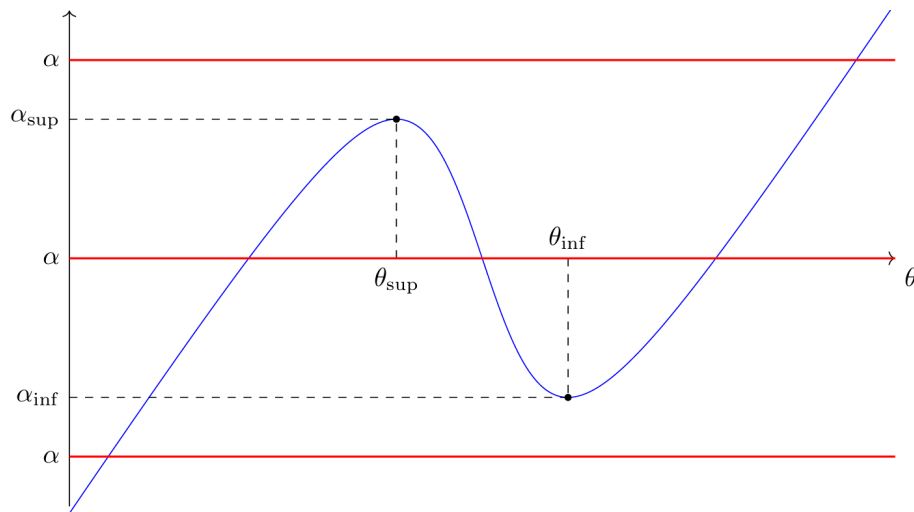
Ce qui faisait que l'équation définissant l'équilibre était :

$$\alpha = k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$$

Où une position d'équilibre  $\theta_{eq}$  était stable si et seulement si  $\theta \mapsto k\theta\left(1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_0^2}}\right)$  était croissante sur un voisinage de  $\theta_{eq}$ . Et on a établi que cette fonction ressemblait à cela :

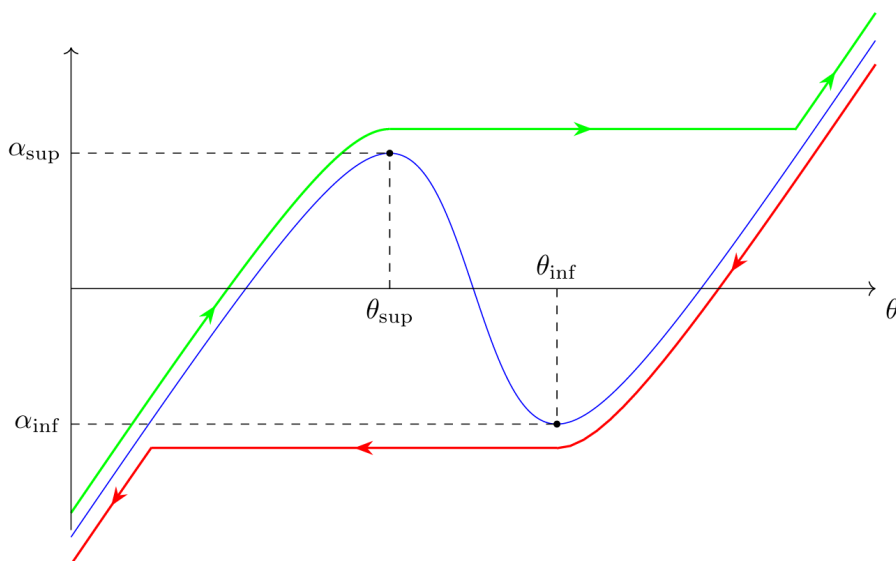


Ce qui nous amenait à avoir plusieurs régimes possibles en fonction de la valeur de  $\alpha$  :

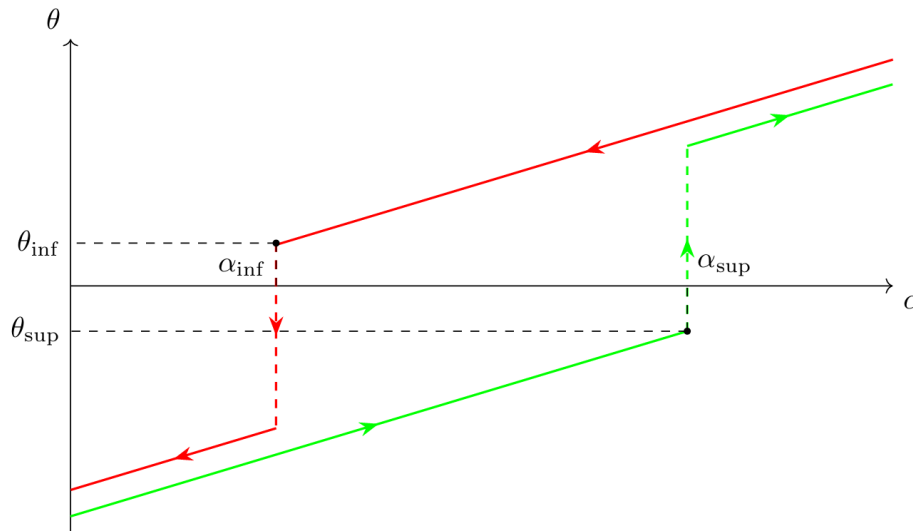


Si  $\alpha < \alpha_{inf}$ , on a une position d'équilibre stable,  $\theta_{eq1} < \theta_{sup}$ . Si  $\alpha_{inf} < \alpha < \alpha_{sup}$ , on a trois positions d'équilibre,  $\theta_{eq1} < \theta_{sup}$ , stable,  $\theta_{eq2} \in [\theta_{sup}, \theta_{inf}]$ , instable, et  $\theta_{eq3} > \theta_{inf}$ , stable. Si  $\alpha > \alpha_{sup}$ , on a une position d'équilibre stable,  $\theta_{eq3} > \theta_{inf}$ .

On va faire l'expérience suivante. Supposons qu'on ait de la dissipation, si bien que peu importe d'où on parte, on converge vers une position d'équilibre stable en un temps typique  $\tau$ . On commence avec  $\alpha < \alpha_{inf}$ . On a donc très vite converger vers  $\theta = \theta_{eq1}$ . On va faire augmenter  $\alpha$ , sur un temps  $\tau' \gg \tau$ , si bien qu'on puisse considérer qu'à tout moment,  $\theta$  est une position d'équilibre stable pour  $\alpha$ . On augmente  $\alpha$ , et on dépasse  $\alpha_{inf}$ .  $\theta_{eq1}(\alpha)$  est toujours stable, donc puisqu'on bouge très lentement, on reste toujours en  $\theta_{eq1}(\alpha)$ . Je suis sur une position d'équilibre stable, donc je peux y rester. Pendant ce temps,  $\theta_{eq3}(\alpha)$  est apparue et est stable, mais on est dans une zone de stabilité avec  $\theta_{eq1}(\alpha)$ , donc on a aucune raison d'y aller.  $\alpha$  dépasse  $\alpha_{sup}$ , tout d'un coup  $\theta_{eq1}$  n'existe plus, le système doit donc aller vers sa seule position d'équilibre stable :  $\theta_{eq3}(\alpha)$ . On continue à augmenter  $\alpha$ , et on reste sur  $\theta_{eq3}$ . On décide maintenant de faire diminuer  $\alpha$ . On reste sur  $\theta_{eq3}(\alpha)$  même quand  $\alpha$  passe sous  $\alpha_{sup}$ , puisqu'on est sur une position d'équilibre stable (ce qui veut dire qu'on peut y rester). On passe sous  $\alpha_{inf}$ ,  $\theta_{eq3}$ , n'existe plus, on va donc vers la seule position d'équilibre disponible :  $\theta_{eq1}(\alpha)$ . On peut résumer tout ce mouvement ainsi :



Ce qui donne ce genre de graphe de  $\theta(\alpha)$  :



Cycle d'hystérésis de l'ATP-synthase en rotation

On peut remarquer que dans ces raisonnements et ce genre de manips, la zone instable est totalement ignorée.

La bistabilité est une propriété typique (fréquente) des systèmes non linéaires. Elle peut donner lieu à un autre phénomène intéressant, la bifurcation, qui est une propriété inhérente aux systèmes chaotiques. Vous avez un très bon exemple de bifurcation avec l'exercice 39 ; en plus d'illustrer ce nouveau phénomène, il résume tout ce qu'il est important de voir dans ce chapitre, la mécanique, les DLs au voisinage de positions d'équilibre, les pulsations propres... Je vous le recommande.

### 5.3 Oscillateur harmonique en mécanique quantique

En mécanique classique, l'énergie d'un oscillateur harmonique est fixée par les conditions initiales, et peut donc aller continûment de 0 à  $+\infty$ . En mécanique quantique, les niveaux d'énergie sont quantifiés, et valent, pour l'oscillateur harmonique :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{31}$$

avec  $\omega$  la pulsation propre de l'oscillateur (la même qu'en mécanique classique). Ce qu'il est intéressant d'observer est que l'énergie minimale n'est plus 0 mais  $\frac{1}{2}h\nu$ , qu'on appelle énergie de point zéro. Cette énergie est particulièrement importante. En effet l'une des idées de l'électrodynamique quantique est que le champ électromagnétique est un ressort, ce qui veut dire que même le vide a l'énergie d'un demi photon. C'est par exemple très important pour le calcul de l'effet Casimir, qui décrit la force attractive entre deux plaques conductrices dans le vide.

### 5.4 Espace des phases et OH

Je vous présente dans cette section une façon utile de regarder les équations mécaniques : l'espace des phases. Qu'est-ce que l'espace des phases ?

**Définition 3 : Espace des phases, courbes intégrales, et portrait de phase**

Si on a un système caractérisé par une position  $q$  (ça peut être  $x$ ,  $\theta$  ou  $r$  par exemple) et par une vitesse  $p$  ( $\dot{x}$ ,  $\dot{\theta}$  ou  $\dot{r}$ ), alors, tracer la trajectoire dans l'espace des phases, c'est tracer  $p$  en fonction de  $q$  (par opposition à  $p$  et  $q$  en fonction du temps). Cela donne des courbes qui sont rarement des fonctions (comme par exemple un cercle ou une ellipse). Le plan  $(q, p)$  est appelé espace des phases. Les courbes définies par les trajectoires sont appelées courbes intégrales. L'ensemble des courbes intégrales est appelé le portrait de phase.

L'intérêt est que le fait de faire disparaître le temps permet, pour des systèmes conservatifs (à énergie fixée), d'obtenir des équations sur les courbes que l'on sait résoudre (alors que les équations différentielles sur  $p$  et  $q$  rendent les équations horaires difficiles à obtenir), et que même sans cela, la structure géométrique des courbes dans l'espace des phases permet de comprendre des choses sur le système (typiquement connaître les positions d'équilibre, leur stabilité, et savoir si le système peut se linéariser à leur voisinage).

Il y a principalement deux façons de tracer le diagramme des phases :

-Pour un système conservatif, écrire la conservation de l'énergie. On obtient alors une équation de courbe qui détermine les courbes intégrales.

-Ou bien on trouve  $p(t)$  et  $q(t)$ , puis on trace  $(q(t), p(t))$  en faisant varier  $t$ .

La trajectoire dans l'espace des phases dépend donc des conditions initiales. Cependant, dans le cas d'un système conservatif, on voit que toutes les trajectoires qui ont la même énergie initiale suivent la même courbe.

**Exemple :**

Prenons le pendule simple (oui, il y a vraiment toute la physique du monde dans le pendule simple), écrivons le théorème de l'énergie mécanique, avec  $E_0$  l'énergie initiale :

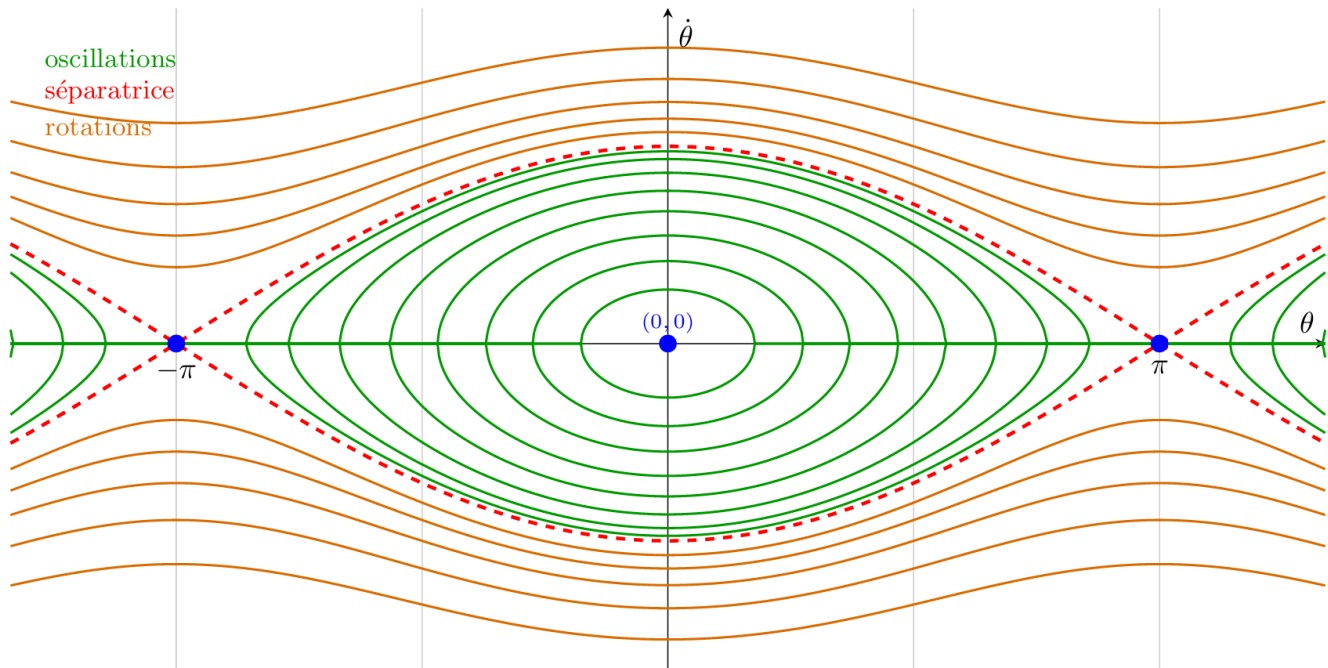
$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = E_0$$

Donc :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2}(E_0 + mgl \cos(\theta))$$

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2}{ml^2}(E_0 + mgl \cos(\theta))}$$

Tracer les courbes intégrales revient donc juste à tracer le graphe d'une fonction (ce que l'on sait faire). On voit que si  $E_0$  est suffisamment grand,  $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais. On voit qu'il faut pour cela que  $E_0 > E_{lim} = mgl$ , soit l'énergie qu'il faut atteindre pour mettre le pendule en position verticale haute. En effet, puisque le système est conservatif, si on donne suffisamment d'énergie au pendule, il va en avoir assez pour faire un tour complet, puis il aura toujours la même énergie quand il sera revenu au même point, donc recommencera le même mouvement : c'est-à-dire une rotation toujours dans le même sens. Si  $E_0 < E_{lim}$ , la hauteur maximale du pendule sera strictement plus petite que celle de la verticale haute, et donc aura perdu toute son énergie cinétique avant d'arriver en haut, il va donc redescendre. On a donc des oscillations. Cela nous permet donc de tracer le portrait de phase suivant :



Portrait de phase du pendule simple

Il y a beaucoup de choses à dire, dont beaucoup que nous généraliserons juste après. Déjà, on peut dire que les solutions parcourent leurs trajectoires dans le sens horaire (par exemple les trajectoires vertes sont parcourues dans le sens horaire puisque pour la partie haute,  $\dot{\theta} > 0$ , donc en haut,  $\theta$  doit augmenter, donc la solution va vers la droite, puis va vers la gauche quand elle arrive dans le demi plan du bas, correspondant à  $\dot{\theta} < 0$ ). On voit effectivement que, suffisamment proche de  $(0,0)$ , donc avec une énergie suffisamment petite, on reste borné dans l'espace des phases, et donc on oscille, on n'a pas l'énergie suffisante pour dépasser  $\theta = \pi$ . On voit également que les trajectoires avec une énergie suffisante ne sont jamais à l'arrêt, et continuent de tourner indéfiniment.

On voit également, qu'à part les séparatrices (on y reviendra), les courbes ne se croisent jamais. Si on est sur une courbe, le mouvement dans l'espace des phases est entièrement déterminé. Cela vient simplement de l'unicité de la solution : si je connais  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ , je sais ce qui va arriver au système. Si deux courbes se croisaient, cela voudrait dire qu'à partir d'une condition initiale donnée, il y aurait deux futurs possibles. Hors pour un système physique, tous les problèmes sont bien posés et déterministes.

Parlons des deux positions d'équilibre. Puisqu'une position d'équilibre est telle que les dérivées temporelles soient nulles en ce point, une position d'équilibre a pour coordonnées  $(\theta_{eq}, 0)$  dans l'espace des phases ( $\dot{\theta}_{eq} = 0$ ). Regardons la position stable  $(0,0)$  : on voit que les trajectoires proches sont bornées et se rapprochent de  $(0,0)$  plus l'énergie devient petite. Cela vient du fait que cette position d'équilibre est stable, si on a peu d'énergie en plus de l'énergie potentielle associée à cette position, on reste dans un voisinage de cette position. On peut l'interpréter en termes de minimum d'énergie potentielle, ce que je vous laisserai faire en exercice en utilisant ce que vous aurez appris durant le deuxième cours de mécanique.

Regardons la position instable  $(\pi,0)$ . On voit que dès qu'on a une condition initiale  $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$  un tout petit peu différente du point  $(\pi,0)$ , soit on a un peu moins d'énergie, et alors on oscille autour de  $\theta = 0$ , donc on s'éloigne substantiellement de  $(\pi,0)$ , soit on a un tout petit peu plus d'énergie, on tourne indéfiniment, donc on s'éloigne nettement de  $(\pi,0)$ . Il reste cependant une exception : si on a une énergie qui nous positionne sur la ligne séparatrice. Examinons donc ce cas.

On suppose que l'on a une énergie  $E_0 = E_{lim} = mgl$ . On sait donc que l'on va se rapprocher de  $(\pi, 0)$ . Supposons que l'on arrive de  $\theta < \pi$  avec une vitesse donc positive :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\theta) + 1)}$$

On va se rapprocher de  $\theta = \pi$ , on pose donc  $\theta = \pi - \varepsilon$  :

$$-\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos(\pi - \varepsilon) + 1)} = \sqrt{\frac{2g}{l}(-\cos(\varepsilon) + 1)} = \sqrt{\frac{2g}{l}\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)}$$

En utilisant le DL à l'ordre 2 en 0 de  $\cos$ . On est donc ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$\dot{\varepsilon} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\varepsilon$$

Dont la solution est une exponentielle décroissante. Donc la solution met un temps infini à atteindre la position d'équilibre  $\theta = \pi$ . C'est cohérent avec ce qu'on connaît : on sait que l'équation linéarisée du pendule simple au voisinage de  $\pi$  est de la forme

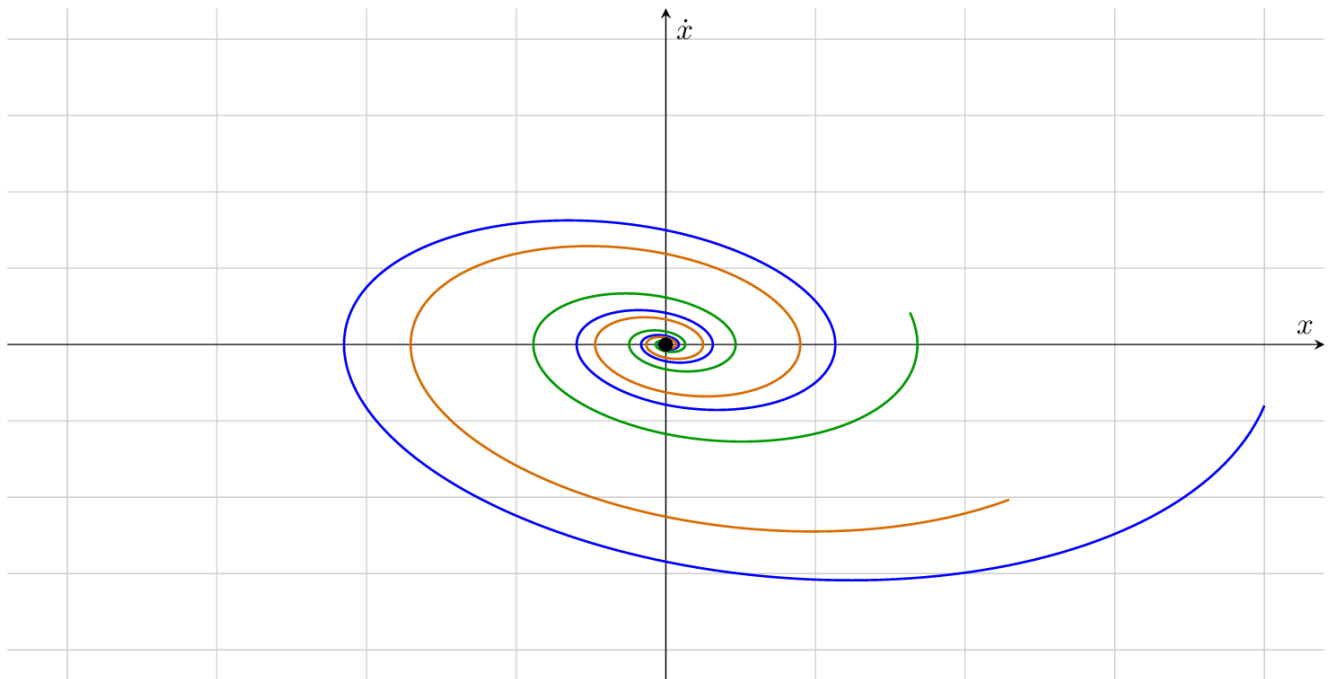
$$\ddot{\varepsilon} - \omega^2\varepsilon = 0$$

Dont la solution est :  $\varepsilon(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ . En temps normal on dirait simplement que cela diverge, mais puisqu'on veut savoir ce qu'il se passe dans le cas purement théorique où cela ne diverge pas (où on a tout pile la bonne énergie); on a alors que  $A$  vaut 0, et il ne reste plus qu'une exponentielle décroissante. Cela permet de confirmer que les courbes ne se croisent pas : la question se posait pour la courbe séparatrice : en fait il y a 4 courbes séparatrices, qui sont adhérentes les unes aux autres, mais ne se marchent pas dessus : le point  $(-\pi, 0)$ , le point  $(\pi, 0)$ , la courbe allant  $(-\pi, 0)$  à  $(\pi, 0)$  (mais ne contenant aucun de ces deux points) en passant par le demi-plan supérieur, qui est parcourue de la gauche vers la droite, et la courbe allant de  $(\pi, 0)$  à  $(-\pi, 0)$  passant par le demi-plan inférieur, parcourue de la droite vers la gauche. Faisons un petit résumé de tout ce que nous avons dit en le généralisant :

### Propriété 18 : Propriétés des courbes intégrales

- Les courbes intégrales ne se coupent pas. Elles peuvent être adhérentes les unes aux autres, mais ne peuvent pas avoir un point d'intersection. Cela vient de l'unicité d'une solution à partir d'un jeu de conditions initiales.
- Une position d'équilibre stable est une position telle qu'autour de celle-ci, les courbes intégrales soient bornées, et telle que plus on diminue la différence d'énergie par rapport au minimum d'énergie potentielle, plus on est proche de celle-ci.
- Une position d'équilibre instable est un point répulsif : au moindre point un petit peu éloigné de celle-ci, les courbes intégrales en vont très loin.
- S'il y a de la dissipation, un point d'équilibre stable est un point attracteur, un point vers lequel toutes les courbes intégrales tombent.

Je vais illustrer ce dernier point : s'il y a de la dissipation, on perd de l'énergie, et donc les courbes intégrales se rapprochent du minimum de l'énergie potentielle, le point d'équilibre stable est donc attracteur. Voici un exemple avec un OH amorti en régime pseudo-périodique, dont on trace le portrait de phase dans l'espace  $(x, \dot{x})$  :



Portrait de phase d'un OH amorti en régime pseudo-périodique

Plus le facteur de qualité est grand, et plus les courbes intégrales se rapprocheront lentement du point d'équilibre stable.

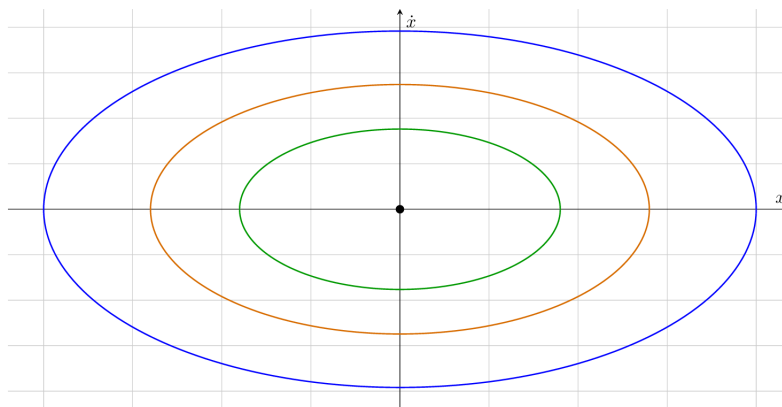
Regardons le portrait de phase d'un OH idéal :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E_0$$

On remarque que c'est exactement l'équation d'une ellipse :

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1$$

Le fait d'être un OH est équivalent au fait d'avoir des ellipses pour courbes intégrales.



Portrait de phase d'un OH

Rappelons-nous de ce qui se passait pour le pendule simple au voisinage de (0,0). Puisqu'il n'y a pas de dissipation, on ne perd pas d'énergie, donc on ne va pas tomber vers (0,0). Comme

le point est stable, on ne va pas non plus s'en éloigner. Et on ne peut pas passer par le point, parce que ça voudrait dire qu'une courbe intégrale intersecterait la courbe qui reste au point  $(0, 0)$ . Et on remarque graphiquement que les courbes intégrales les plus proches ressemblent beaucoup à des ellipses. C'est normal puisqu'on sait qu'au voisinage de 0, le pendule simple est approximable par un OH, donc les courbes intégrales sont approximables par des ellipses. On donc la propriété suivante :

**Propriété 19 : Voisinage d'un point d'équilibre stable dans l'espace des phases**

Un point d'équilibre est nécessairement sur l'axe  $p = 0$  de l'espace des phases (puisque la dérivée temporelle de  $q$  s'y annule). Au voisinage d'un point d'équilibre stable, si le système est non-dissipatif, les courbes intégrales sont approximables par des ellipses. Approximer les courbes intégrales par des ellipses c'est exactement comme linéariser le système, c'est-à-dire l'approximer par un OH.

Essayons de le comprendre avant d'en faire la démonstration quantitative. On a un système non dissipatif, qu'on peut donc mettre sous la forme :

$$p^2 + V(q) = C_0$$

Quitte à changer l'origine des  $q$ , on peut supposer que le point d'équilibre stable est en  $(0, 0)$ . On suppose qu'on est au voisinage de  $(0, 0)$ . On ne peut pas passer par  $(0, 0)$  car les courbes intégrales ne peuvent pas se croiser et qu'il existe une solution stationnaire en  $(0, 0)$ , donc une courbe intégrale réduite à un point en  $(0, 0)$ . Donc on ne peut pas s'en approcher indéfiniment. Par ailleurs, il est stable, donc on ne peut pas s'en éloigner de beaucoup. On fait donc des tours d'une trajectoire ni trop proche ni trop loin de  $(0, 0)$ . Une ellipse est simplement un cercle étalé différemment selon deux axes perpendiculaires. Et comme  $p$  et  $q$  n'ont pas la même homogénéité, et en tous cas pas la même signification, ils ne peuvent pas former un cercle. Une ellipse est donc la courbe lisse la plus simple paramétrisant une rotation entre deux variables représentant des axes perpendiculaires. Comme l'énergie sépare la contribution en  $p$  (partie énergie cinétique) et en  $q$  (partie énergie potentielle), il est naturel que les courbes intégrales représentent une rotation lisse entre une valeur sur l'axe  $p = 0$  et une valeur sur l'axe  $q = 0$  (si  $V$  est suffisamment régulière, comme on l'a vu dans la partie 3, il faut qu'elle soit deux fois dérivable en 0). L'apparition d'une ellipse est donc compréhensible. Passons à une démonstration mathématique :

$$C_0 = p^2 + V(q) \underset{q \rightarrow 0}{=} p^2 + V(0) + qV'(0) + \frac{1}{2}V''(0)q^2$$

Et comme on l'a vu, pour une position d'équilibre stable,  $V'(0) = 0$  et  $V''(0) > 0$ . On a donc :

$$C' = p^2 + \alpha q^2$$

Avec  $\alpha > 0$ . C'est à nouveau l'équation d'une ellipse dans l'espace des phases.

On peut aussi comprendre l'instabilité de cette manière là, si  $V''(0) < 0$ , on a une équation de la forme :

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 = 1$$

C'est une équation d'hyperbole, donc de quelque chose qui diverge. Si on est sur un maximum d'énergie potentielle, au voisinage de cette position, on a des courbes intégrales qui divergent (donc qui s'en éloignent).

Mais encore mieux! On peut comprendre l'allure des séparatrices sur le portrait de phase du pendule simple. Pour passer de :

$$C' = p^2 - \alpha q^2$$

Avec  $\alpha > 0$  à :

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 = 1$$

Il faut diviser  $C'$ . Cela donne alors les hyperboles qui s'éloignent du point d'équilibre instable. Localement, les séparatrices sont les courbes intégrales qui ne divergent pas, ce sont donc celles qui vérifient  $C' = 0$ . On a donc une équation de la forme :

$$p^2 - \alpha q^2 = 0$$

C'est-à-dire :

$$p = \pm\sqrt{\alpha}q$$

C'est donc l'équation de deux droites de pentes opposées, s'intersectant au point d'équilibre instable. C'est bien ce qu'on observait au croisement des séparatrices sur le portrait de phase du pendule simple. Et on retrouve ce qu'on avait dit : un point sur une courbe séparatrice met un temps infini à atteindre la position d'équilibre instable, puisqu'on a, pour la branche - :

$$\dot{q} = -\sqrt{\alpha}q$$

Dont la solution est une exponentielle décroissante.

### 5.5 Énergie et oscillateur harmonique en 3 dimensions

Nous avons traité jusque là le cas unidimensionnel, et pour cause! Le cas tridimensionnel nécessite beaucoup plus de bagage théorique. Cependant, il permet d'arriver à la même conclusion : au voisinage d'un point d'équilibre stable, tout système mécanique est équivalent à un OH. Je vous présente ici toute la théorie nécessaire pour établir ce résultat, ce qui utilise beaucoup de notions que vous ne connaissez pas, uniquement pour vous donner un aperçu du travail en trois dimensions, pour satisfaire votre curiosité et insister encore une fois sur l'universalité de l'OH. Il vous est rigoureusement impossible de tout comprendre au niveau terminale, et même si vous compreniez, ce n'est pas utile à votre niveau.

Supposons que nous ayons une énergie potentielle  $E_p(x, y, z)$ . La condition d'équilibre est que la force s'annule en un point  $(x_0, y_0, z_0)$ . Cela veut dire qu'une position d'équilibre est un extremum de l'énergie potentielle. La stabilité vient de la même condition :  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  doit être un minimum de l'énergie potentielle. Mathématiquement, voyons comment cela se traduit. Le DL à l'ordre 2 de l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p(\vec{r}_0 + \vec{h}) \approx E_p(\vec{r}_0) + \vec{\nabla} E_p(\vec{r}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0) \vec{h} \tag{32}$$

Où  $\vec{h}$  est un petit paramètre, avec

$$\vec{\nabla} E_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial x} \\ \frac{\partial E_p}{\partial y} \\ \frac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$H_{E_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$H_{E_p}(\vec{r}_0)$  est donc une matrice,  $H_{E_p}(\vec{r}_0)\vec{h}$  se calcule avec les règles du calcul matriciel. Si vous ne l'avez pas vu cela ne fait rien, personne ne vous demande de faire des calculs, tous ces détails sont là pour votre culture uniquement.  $H_{E_p}$  est symétrique, car d'après le lemme de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x_j \partial x_i}$$

Le terme  $\vec{\nabla} E_p(\vec{r}_0) \cdot \vec{h}$  est d'ordre 1 en  $\vec{h}$ , et le terme  $\frac{1}{2} \vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0) \vec{h}$  est d'ordre 2 en  $\vec{h}$ . Pour que  $\vec{r}_0$  soit un point d'équilibre, il faut que ce soit un minimum de l'énergie potentielle, ce qui implique que

$$\vec{\nabla} E_p(\vec{r}_0) = 0$$

Cette condition correspond à l'annulation de la force en ce point. Il faut également que pour tout  $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{h} \cdot H_{E_p}(\vec{r}_0) \vec{h} > 0$ . Cela correspond à ce que  $H_{E_p}(\vec{r}_0)$  soit "définie positive", ce qui se démontre en trouvant les racines du polynôme :

$$\chi_{H_{E_p}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} - \lambda & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} - \lambda & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} - \lambda \end{pmatrix}$$

$H_{E_p}$  est définie positive si et seulement si toutes les racines de ce polynôme sont strictement positives. Le théorème spectral nous indique qu'il existe une base orthonormée  $(\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$  telle que  $H_{E_p}(\vec{r}_0)$  exprimée dans cette base soit diagonale.

$$H_{E_p}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

Où  $k_1, k_2$  et  $k_3$  sont les racines de  $\chi_{H_{E_p}}$ , toutes strictement positives. Le DL de l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$E_p(\vec{r}_0 + \vec{h}) = E_p(\vec{r}_0) + \frac{1}{2}(k_1 x'^2 + k_2 y'^2 + k_3 z'^2) \tag{33}$$

Où  $\vec{h} = (x', y', z')$  Ce qui donne une force :

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{h}) \approx - \begin{pmatrix} k_1 x' \\ k_2 y' \\ k_3 z' \end{pmatrix} \tag{34}$$

Ce qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -k_1 x' \\ m\ddot{y}' = -k_2 y' \\ m\ddot{z}' = -k_3 z' \end{cases}$$

On a donc un oscillateur harmonique à une dimension sur chaque axe du repère, chacun à des pulsations éventuellement différentes  $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$ , que l'on sait résoudre. On retrouve le cas d'un ressort si l'on suppose que la force est isotrope (la même dans toutes les directions).